Marko Žnidarič

VIŠJA KVANTNA MEHANIKA

Zbirka nalog

Oddelek za Fiziko
Fakulteta za Matematiko in Fiziko
Univerza v Ljubljani
2016

Verzija: 22. januar 2018

Kazalo

1 Pisava

I. in II. kvantizacija

Če želimo povdariti, da pišemo v I. kvantizaciji, uporabimo pisavo $|i_1 j_2 k_3\rangle^{I.} \equiv |\varphi_i \varphi_j \varphi_k\rangle^{I.} \equiv |\varphi_i\rangle_1 \otimes |\varphi_j\rangle_2 \otimes |\varphi_k\rangle_3$. V II. kvantizaciji, $|n_1 n_2 \ldots\rangle^{II.}$, nam števila n_j povejo število delcev (zasedenost) enodelčnega stanja φ_j.

Fermioni

Če ni povedano drugače, so c_j in $c_j^\dagger$ standardni fermionski operatorji, ki zadoščajo antikomutatorjem $\{c_j, c_k^\dagger\} = \delta_{j,k}$, vsi preostali antikomutatorji pa so enaki nič. Fockovo stanje fermionov $|1_k 0 \cdots 0 1_r\rangle$ je definirano z

$$|1_k 0 \cdots 0 1_r\rangle := c_k^\dagger c_r^\dagger |0 \cdots 0\rangle. \tag{1}$$

Stanja polnimo torej iz desne proti levi.

Bozoni

Bozonske operatorje ponavadi označimo s črko a, pri čemer je a anihilacijski in $a^\dagger$ kreacijski operator. Različni bozoni a_j zadoščajo komutacijskim zvezam $[a_j, a_k] = 0$, $[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{j,k}$.

Spinski operatorji

Operatorji komponent vrtilne količine zadoščajo

$$[S^\alpha, S^\beta] = \mathrm{i}\hbar \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S^\gamma. \tag{2}$$

Kadar imamo opravka s spinom $\frac{1}{2}$ pogosto rajši delamo z brezdimenzijskimi Paulijevimi matrikami, za katere velja

$$[\sigma^{\mathrm{x}}, \sigma^{\mathrm{y}}] = 2\mathrm{i}\,\sigma^{\mathrm{z}}, \tag{3}$$

in podobno za ciklične permutacije. Pogosto uporabljamo tudi t.i. lestvična operatorja $\sigma^\pm := (\sigma^{\mathrm{x}} \pm \mathrm{i}\sigma^{\mathrm{y}})/2$, za katera velja $\sigma^+|1\rangle = \emptyset$ in $\sigma^+|-1\rangle = |1\rangle$, ter $\sigma^-|1\rangle = |-1\rangle$ in $\sigma^-|-1\rangle = \emptyset$, če je $|\pm 1\rangle$ lastno stanje σ^{z} z lastno vrednostjo ± 1.

Jordan-Wignerjeva transformacija

Uporabljali bomo

$$c_j = \sigma_1^z \cdots \sigma_{j-1}^z \sigma_j^-, \qquad c_j^\dagger = \sigma_1^z \cdots \sigma_{j-1}^z \sigma_j^+, \tag{4}$$

kjer sta $\sigma_j^\pm = (\sigma_j^x \pm \mathrm{i}\,\sigma_j^y)/2$. Obratna transformacija je

$$\begin{aligned} \sigma_j^x &= \sigma_1^z \cdots \sigma_{j-1}^z (c_j + c_j^\dagger), \\ \sigma_j^y &= \mathrm{i}\,\sigma_1^z \cdots \sigma_{j-1}^z (c_j - c_j^\dagger), \\ \sigma_j^z &= 2c_j^\dagger c_j - 1 = (-1)^{1+c_j^\dagger c_j}. \end{aligned} \tag{5}$$

Wickov izrek

Naj bo α_j kanonična baza operatorjev. Vsak operator A linearen v α_j in $\alpha_j^\dagger$ lahko razdelimo kot $A = A^- + A^+$, kjer je A^- linearna kombinacija α_j, A^+ pa linearna kombinacija $\alpha_j^\dagger$ (v splošnem $A^- \neq A^+$). Definiramo normalno urejen operator,

$$: A_1^\pm A_2^\pm \cdots A_r^\pm :\equiv (\pm 1)^P A_{i_1}^+ A_{i_2}^+ \cdots A_{i_p}^- \cdots A_{i_l}^-,$$

kjer je P sodost/lihost permutacije, ki nam preuredi operatorje, dva predznaka pa sta za bozone in fermione (minus). Kontrakcija dveh je sedaj definirana z

$$\underbracket{A_1^{\pm} A_2^{\pm}} \equiv A_1^{\pm} A_2^{\pm} - :A_1^{\pm} A_2^{\pm}:,$$

in je skalar (identični operator) za kanonične α_j. Npr., če so α_j kar c_j, ali a_j, imamo $\underbracket{c_j c_k^{\dagger}} = \delta_{j,k}$, in $\underbracket{a_j a_k^{\dagger}} = \delta_{j,k}$, vse ostale kontrakcije pa so nič. Za operatorje velja tudi kombinatorična zveza (Wickov izrek),

$$A_1^{\pm} A_2^{\pm} \cdots A_l^{\pm} =: A_1^{\pm} \cdots A_l^{\pm} : + \sum : \text{en par} : + \sum : \text{dva para} : + \cdots + \sum : \text{vsi sparjeni} : .$$

Zgornja zveza sama po sebi še ni koristna, kar pa postane, kadar uspemo najti takšne α_j, ki anihilirajo stanje $|\phi\rangle$ v katerem želimo izvrednotiti pričakovane vrednosti. Tedaj bodo namreč vsi nesparjeni členi dali nič in nam ostane le vsota po popolnoma sparjenih členih, ki pa so vsi samo produkti skalarjev. Ponovimo, da bo Wickov izrek uporaben za izračun $\langle\phi|\cdots|\phi\rangle$ mora veljati $\alpha_j|\phi\rangle = 0$ za vsak j. Pravimo, da je $|\phi\rangle$ vakuum za α_j.

Koristne zveze

Baker-Campbell-Hausdorffova zveza (na kratko BCH) pravi, da velja

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]}\,\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}, \tag{6}$$

če A in B komutirata s komutatorjem $[A, B]$.

Baker-Hausdorffova enakost je

$$\mathrm{e}^{\alpha A} B \mathrm{e}^{-\alpha A} = B + \alpha[A, B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A, [A, B]] + \cdots , \tag{7}$$

in velja za poljubna operatorja A in B.

2 Naloge

2.1 Direktni produkt prostorov

Naloga 1: Kdaj je splošno stanje dveh kubitov $|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$ prepleteno, to je, se ga ne da zapisati kot direktni produkt $|\psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$?

Naloga 2:

(a) Zapiši matrično upodobitev $A = \sigma_1^x \otimes \sigma_2^z$.

(b) Zapiši reduciran operator $B = \mathrm{tr}_2 A$.

Naloga 3: Izračunaj termični gostotni operator $\rho = \mathrm{e}^{-\beta H}/Z$, $Z = \mathrm{tr}(\mathrm{e}^{-\beta H})$, za $H = J\sigma_1^x\sigma_2^x$, ter pričakovano vrednost energije v taistem stanju.

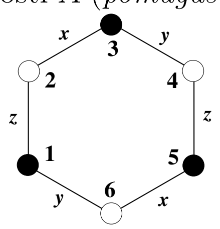
Naloga 4 (*1k.1.L1314*): Naj bo $A = \sigma_1^{\mathrm{x}} \otimes \sigma_2^{\mathrm{y}} - \sigma_1^{\mathrm{y}} \otimes \sigma_2^{\mathrm{x}}$, kjer so $\sigma_j^{\mathrm{x,y}}$ Paulijeve matrike na j-tem mestu.

(a) Izračunaj operator $\mathrm{tr}_2\,(A)$, skalar $\mathrm{tr}(A^2)$, in operator $\mathrm{tr}_2[(\sigma_2^{\mathrm{x}} + \sigma_2^{\mathrm{y}})A]$.

(b) V prvi kvantizaciji zapiši bozonsko Fockovo stanje $|210\rangle$ in fermionsko Fockovo stanje $|1101\rangle$.

Naloga 5 (*1i.1.L1314*): Linearna operacija $\mathcal{L}$ je definirana nad prostorom gostotnih operatorjev enega dvonivojskega sistema, in deluje kot $\mathcal{L}(\rho) = 2L\rho L^\dagger - L^\dagger L\rho - \rho L^\dagger L$, kjer je $L = \sigma^+ = (\sigma^{\mathrm{x}} + \mathrm{i}\sigma^{\mathrm{y}})/2$. Zapiši matrično upodobitev operatorja $\mathcal{L}$ v bazi Paulijevih matrik, torej $\mathcal{L}_{j,k} = \mathrm{tr}(\sigma^{\mathrm{j}}\mathcal{L}(\sigma^k))/2$, pri čemer so $\sigma^j \in \{\mathbb{1}, \sigma^{\mathrm{x}}, \sigma^{\mathrm{y}}, \sigma^{\mathrm{z}}\}$.

Naloga 6 (*1i.2.L1415*): Uporabi algebro Paulijevih matrik, $\sigma^j\sigma^k = \mathrm{i}\,\varepsilon^{jkm}\sigma^m$, in poenostavi operator $A = \sigma_1^{\mathrm{z}}\sigma_2^{\mathrm{z}}\sigma_2^{\mathrm{x}}\sigma_3^{\mathrm{x}}\sigma_3^{\mathrm{y}}\sigma_4^{\mathrm{y}}\sigma_4^{\mathrm{z}}\sigma_5^{\mathrm{z}}\sigma_5^{\mathrm{x}}\sigma_6^{\mathrm{x}}\sigma_6^{\mathrm{y}}\sigma_1^{\mathrm{y}}$. Pokaži, da operator A komutira s Hamiltonijanom $H = J_{\mathrm{x}}\sum_{j,k\in x}\sigma_j^{\mathrm{x}}\sigma_k^{\mathrm{x}} + J_{\mathrm{y}}\sum_{j,k\in y}\sigma_j^{\mathrm{y}}\sigma_k^{\mathrm{y}} + J_{\mathrm{z}}\sum_{j,k\in z}\sigma_j^{\mathrm{z}}\sigma_k^{\mathrm{z}}$, kjer so spini na ogljiščih šestkotnika, dvodelčne sklopitve na stranicah, tip sklopitve pa je označen na sliki. Ali uspeš poiskati lastne vrednosti A (*pomagaš si lahko s kakšno lepo lastnostjo* A)?



Naloga 7 (*1k.1.L1516*): Z meritvijo neke opazljivke B želimo razločiti kvantni stanji n kubitov (spinov 1/2) $|\psi_-\rangle$ in $|\psi_+\rangle$, $|\psi_\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\ldots0\rangle \pm |11\ldots1\rangle)$. (a) Izračunaj reducirani gostotni operator $\rho_r^\pm := \mathrm{tr}_{j\neq\mathcal{A}_r}|\psi_\pm\rangle\langle\psi_\pm|$ za obe stanji, če je $\mathcal{A}_r$ poljubna množica r kubitov, $\mathcal{A}_r \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ (sled pa torej teče čez preostalih $n - r$ kubitov). $\rho_r^\pm$ izračunaj za vse možne vrednosti r, $r = 1, \ldots, n$. (b) Dokaži, da je pričakovana vrednost $\langle\psi_\pm|B|\psi_\pm\rangle$ poljubnega ne-globalnega operatorja B enaka za obe stanji. Ne-globalni operator je tak, ki deluje kot identiteta na vsaj enem kubitu; npr. za $n=3$ je $\sigma_1^{\mathrm{x}}\sigma_2^{\mathrm{z}}\sigma_3^{\mathrm{z}}$ globalen, $\sigma_1^{\mathrm{x}}\mathbb{1}_2\sigma_3^{\mathrm{z}}$ pa ne [*lastnost (b) je potrebna (a ne zadostna) lastnost topoloških kvantnih stanj. Za topološko urejenost potrebujemo še, da je $\langle\psi_-|B|\psi_+\rangle = 0$ za vsak ne-globalen B, torej da le globalni operatorji sklapljajo stanji.*].

Naloga 8 (*1i.3.L1516*): Za čisto stanje $|\mathrm{W}\rangle := \frac{1}{\sqrt{n}}(|10\ldots0\rangle + |010\ldots0\rangle + \cdots + |0\ldots01\rangle)$ na n kubitih izračunaj reducirani gostotni operator ρ_r kubita na r-tem mestu, $\rho_r := \mathrm{tr}_{j\neq r}|\mathrm{W}\rangle\langle\mathrm{W}|$. Izračunaj tudi reducirani gostotni operator para kubitov na mestih r in k.

2.2 II. kvantizacija

Naloga 9: Zapiši matrično upodobitev permutacij P_{12} in P_{13} na 2-dimenzionalnem ireducibilnem podprostoru iz $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(2|\alpha\beta\gamma\rangle + 2|\beta\alpha\gamma\rangle - |\alpha\gamma\beta\rangle - |\gamma\beta\alpha\rangle - |\gamma\alpha\beta\rangle - |\beta\gamma\alpha\rangle)$ in $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(-|\alpha\gamma\beta\rangle + |\gamma\beta\alpha\rangle + |\gamma\alpha\beta\rangle - |\beta\gamma\alpha\rangle)$.

Naloga 10:

(a) Zapiši bozonsko stanje $|201\rangle^{II.}$ v I. kvantizaciji.

(b) V I. kvantizaciji izvrednoti delovanje operatorja $\sum_k |2\rangle_k\langle 1|_k^{I.}$ na stanju $|201\rangle^{II.}$.

Naloga 11 (*1k.1.L1112*): Izračunaj, to je razpiši po standardni bazi Fockovega prostora, naslednji stanji:

(a) $c_3 c_3^\dagger c_1 c_2^\dagger c_1^\dagger |00000\rangle$.

(b) $\mathrm{e}^{z\, c_4^\dagger c_2}|111000\rangle$.

Naloga 12 (*2i.1.L1112*): Izrazi naslednji stanji z baznimi stanji Fockovega prostora:

(a) $c_4^\dagger c_3 c_3^\dagger c_2 c_1^\dagger |01000\rangle$

(b) $\mathrm{e}^{z c_4^\dagger c_3 c_1}|111000\rangle$

Naloga 13 (*1k.1.L1213*): V I. kvantizaciji zapiši fermionsko Fockovo stanje $|1011\rangle$.

Naloga 14 (*2i.3.L1112*): V formalizmu druge kvantizcije zapiši spinsko odvisno dvodelčno kontaktno interakcijo, ki obrača spin, $V(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}) = \Delta\, a^3\, \delta(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})(|\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + \mathrm{h.c.})$. Uporabi reprezentacijo v momentnem prostoru z ravnimi valovi za bazo enodelčnih stanj. Izračunaj pričakovano vrednost takega potenciala v osnovnem stanju Fermijevega plina pri temperaturi nič.

Naloga 15 (*1k.2.L1415*):

(a) V prvi kvantizaciji zapiši fermionsko Fockovo stanje $|10011\rangle$.

(b) Pokaži, da za $A = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ in $B = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, velja $[A,B] = 2\mathrm{i}\,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, kjer je $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, tri komponente vektorja $\boldsymbol{\sigma}$ pa so enake Paulijevim matrikam.

Naloga 16: V osnovnem stanju Fermijevega plina $|\phi_0\rangle$ izračunaj statični strukturni faktor $S(\mathbf{q})$. Izraz za $S(\mathbf{q}) := \frac{1}{N}\langle\phi_0|\rho_q\rho_{-q}|\phi_0\rangle$ zapiši v kontinuumski limiti, ko gre število elektronov N proti neskončno, kjer lahko vsoto čez diskretna stanja nadomestiš z integralom. Fourierova komponenta gostote je $\rho_q = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})$, kjer je $\Psi(\mathbf{r})$ operator polja.

2.3 Bozonska in fermionska algebra

Naloga 17: Za bozone izračunaj komutator $[a_j, f(a_j^\dagger)]$. Kaj pa $[a_j^\dagger, f(a_j)]$?

Naloga 18: Izračunaj $g(z) := \mathrm{e}^{-za^\dagger} a \mathrm{e}^{za^\dagger}$, kjer je z kompleksno število.

Naloga 19: Pokaži, da velja $\mathrm{e}^{-za^\dagger a} f(a, a^\dagger)\mathrm{e}^{za^\dagger a} = f(a\mathrm{e}^z, a^\dagger \mathrm{e}^{-z})$.

Naloga 20 (*1k.2.L1112*): Pokaži, da velja $[a, \mathrm{e}^{-z\,a^\dagger a}] = (\mathrm{e}^{-z} - 1)\mathrm{e}^{-z\,a^\dagger a}\,a$, kjer sta a in $a^\dagger$ bozonska operatorja.

Naloga 21 (*1k.3.L1112*): Definirajmo operatorje $A := c^\dagger + c$, $B := \mathrm{i}(c - c^\dagger)$ in $D := 2c^\dagger c - \mathbb{1}$. Izračunaj komutatorje $[A, B]$, $[B, D]$ in $[A, D]$ in jih poizkusi izraziti z A, B in D. c in $c^\dagger$ sta standardna fermionska operatorja.

Naloga 22 (*2k.1.L1112*): Izračunaj Debye-Wallerjev faktor $W = \frac{1}{2}\langle[\mathbf{q}\cdot\mathbf{u_R}(t)]^2\rangle_\beta$, kjer je

$$\mathbf{u_R}(t) = \sum_{\mathbf{k},s}\sqrt{\frac{\hbar}{2NM\omega_s(\mathbf{k})}}\left(a_s(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_s(\mathbf{k})t} + a_s^\dagger(-\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_s(\mathbf{k})t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{kR}}, \tag{9}$$

odmik atoma iz ravnovesne lege, $a_s(\mathbf{k})$ pa so standardni bozonski operatorji s komutatorjem $[a_s(\mathbf{k}), a_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{s,s'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ (vsi ostali pa so nič). Frekvenčni spekter je simetričen glede na $\mathbf{k} = 0$, enotski polarizacijski vektorji $\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k})$ pa zadoščajo $\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\varepsilon}_s^*(-\mathbf{k})$. Povprečje je čez kanonični ansambel nesklopljenih harmonskih oscilatorjev, za katerega je zasedenost normalnih nihajnih načinov pri $\beta = \frac{1}{kT}$ enaka $\langle a_s^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k})\rangle_\beta = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega_s(\mathbf{k})}-1}$.

Naloga 23: Izračunaj izraz $\mathrm{e}^{zc^\dagger c}$, kjer je c fermionski anihilator, z pa skalar.

Naloga 24 (*1i.1.L1112*): Izračunaj in maksimalno poenostavi izraz $\mathrm{e}^{-zc^\dagger} c\,\mathrm{e}^{zc^\dagger}$, kjer sta c in $c^\dagger$ fermionski anihilacijski oz. kreacijski operator, z pa je kompleksno število.

Naloga 25 (*1i.2.L1112*): Izračunaj korelacijsko funkcijo $\langle x(t)x(t') + x(t')x(t)\rangle_\beta$ v termičnem stanju harmonskega oscilatorja, $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$, kjer je $[a, a^\dagger] = 1$. Koordinata oscilatorja se z bozonskimi operatorji izraža kot $x(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a\exp(-\mathrm{i}\omega t) + a^\dagger\exp(\mathrm{i}\,\omega t))$. Velja še, da je termično povprečje $\langle a^\dagger a\rangle_\beta = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}-1}$.

Naloga 26 (*1i.3.L1112*): S predpisom $|z\rangle = \mathrm{e}^{za^\dagger}|0\rangle$ definirajmo stanje $|z\rangle$, kjer je $a^\dagger$ bozonski kreacijski operator, z kompleksno število, $|0\rangle$ pa lastno stanje $a^\dagger a$ z lastno vrednostjo 0 (takemu stanju pravimo koherentno stanje). Izračunaj $\langle z|a|z\rangle$ in $\langle z_1|z_2\rangle$.

Naloga 27: Pokaži, da je transformacija spinskih operatorjev $S^{\mathrm{x}} \to S^{\mathrm{x}}$, $S^{\mathrm{y}} \to -S^{\mathrm{y}}$ in $S^{\mathrm{z}} \to -S^{\mathrm{z}}$ kanonična.

Naloga 28: Kdaj bo linearna transformacija dveh fermionskih operatorjev $c_{1,2}$,

$$d_1 := U_{11}c_1 + U_{12}c_2^\dagger, \qquad d_2 := U_{21}c_1 + U_{22}c_2^\dagger, \tag{11}$$

kanonična, torej bodo tudi $d_{1,2}$ fermionski operatorji?

Naloga 29 (*2i.2.L1112*): Poišči vse komutacijske zveze med operatorji d_j in $d_j^\dagger$ ($[d_j, d_k]$, $[d_j^\dagger, d_k^\dagger]$ in $[d_j, d_k^\dagger]$), ki so definirani s predpisom,

$$d_j = \left(\prod_{k=1}^{j-1}(1-2n_k)\right) c_j,$$

kjer je $n_j = c_j^\dagger c_j$, c_j pa so standardni fermionski anihilacijski operatorji s kanoničnimi antikomutatorskimi zvezami $\{c_j, c_k\} = 0$, $\{c_j^\dagger, c_k^\dagger\} = 0$ in $\{c_j, c_k^\dagger\} = \delta_{j,k}$.

Naloga 30 (*1k.4.L1213*): Pokaži, da velja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}D = (a^\dagger - \frac{v}{2})\,D$, kjer je $D = \mathrm{e}^{u\,a^\dagger - v\,a}$, $a^\dagger$ in a sta bozonska operatorja, u in v pa skalarja.

Naloga 31 (*2k.1.L1213*): Za fermionski sistem s Hamiltonijanom,

$$H = c_1c_2^\dagger + c_2c_1^\dagger + \Delta(c_1c_2 + c_2^\dagger c_1^\dagger), \tag{12}$$

pokaži, da operator parnosti $P = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi N}$, kjer je $N = c_2^\dagger c_2 + c_1^\dagger c_1$ komutira s H.

Naloga 32 (*1k.3.L1314*): Imejmo fermionski sistem s $H = c^\dagger c$ in začetno stanje $|\psi(0)\rangle = \cos(\varphi)|0\rangle + \sin(\varphi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\chi}|1\rangle$. Izračunaj pričakovano vrednost operatorja $c+c^\dagger$ ob času t, torej $\langle\psi(t)|(c+c^\dagger)|\psi(t)\rangle$, kjer je $|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,Ht}|\psi(0)\rangle$.

Naloga 33 (*1k.4.L1314*): Pokaži, da je za harmonski oscilator ravnovesna pričakovana vrednost $\langle \mathrm{e}^{\alpha a+\gamma a^\dagger}\rangle \equiv \mathrm{tr}(\rho_\beta\,\mathrm{e}^{\alpha a+\gamma a^\dagger})$ enaka $\exp\left(\frac{\alpha\gamma}{2}\coth\frac{\beta\epsilon}{2}\right)$, kjer je $\rho_\beta \equiv \exp(-\beta H)/Z$, $H = \epsilon a^\dagger a$, $Z = \mathrm{tr}(\exp(-\beta H))$, $a^\dagger$ in a pa sta bozonska operatorja. *Koristiti utegne zveza BCH.*

Naloga 34 (*1i.2.L1314*): Izrazi komutator na direktnem produktu podprostorov s komutatorji in antikomutatorji na obeh posameznih podprostorih, torej $[A \otimes B, C \otimes D]$ bi radi zapisali v obliki $\sum_k R_k \otimes P_k$, kjer so R_k, P_k komutator ali pa antikomutator. Ta rezultat uporabi za izračun $\mathrm{e}^{-z\,a\otimes B}(a^\dagger \otimes C)\mathrm{e}^{z\,a\otimes B}$, kjer sta $a, a^\dagger$ kanonična bozonska operatorja, B in C pa poljubna komutirajoča operatorja. Uporabiš lahko Baker-Hausdorffovo enakost $\mathrm{e}^{\alpha A}B\mathrm{e}^{-\alpha A} = B + \alpha[A,B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A,[A,B]] + \cdots$.

Naloga 35 (*1k.1.L1415*): (a) Kakšnim pogojem mora zadoščati linearna transformacija $b_j = \sum_{k=1}^{2} L_{jk}\,a_k$ med anihilacijskima bozonskima operatorjema a_1 in a_2 in novima anihilacijskima bozonskima operatorjema b_1 in b_2, da bo ohranjala kanonične komutacijske zveze za bozone? (b) Poišči primer transformacije iz (a), ki diagonalizira $H = a_1a_2^\dagger + a_2a_1^\dagger$.

Naloga 36 (*2k.4.L1415*)**:** Izračunaj dinamični strukturni faktor,

$$S(k,\omega) = \exp(-2W(k)) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(k^2\langle x(t)x(0)\rangle) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

za harmonski oscilator v termičnem ravnovesju. Z bozonskimi operatorji lahko izrazimo lego kot $x(0) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(a + a^\dagger)$. Termična pričakovana vrednost zasedbenega števila je $\langle a^\dagger a\rangle = 1/(\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega_0} - 1)$, $H = \hbar\omega_0(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ [*$W(k)$ je Debye-Wallerjev faktor, ki ga ni treba računati; Pomagati utegne generatrisa modificiranih Besslovih funkcij* $\exp[\frac{1}{2}y(x + \frac{1}{x})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n I_n(y)$*; Heisenbergova slika je* $B(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar} B(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$].

Naloga 37 (*1i.3.L1415*)**:** Izračunaj fermionsko ravnovesno pričakovano vrednost korelacijske funkcije, $C(t,t') = \langle c(t')c^\dagger(t) + c(t)c^\dagger(t')\rangle$, kjer je $\langle A\rangle = \mathrm{tr}(A\rho)$, termično stanje pa $\rho = \exp(-\beta H)/\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{-\beta H})$, in $H = \epsilon\, c^\dagger c$. Heisenbergova slika je definirana z izrazom $B(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$.

Naloga 38 (*2i.3.L1415*)**:** Za harmonski oscilator s $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ izračunaj ravnovesno pričakovano vrednost $\langle F(t)\rangle = \mathrm{tr}(F(t)\rho)$, kjer je $F(t) = x\cos(\omega t) + \frac{p}{m\omega}\sin(\omega t)$, gostotni operator pa običajno kanonično stanje $\rho = \exp(-\beta H)/\mathrm{tr}[\exp(-\beta H)]$, $x = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}(a + a^\dagger)$ in $p = \mathrm{i}\sqrt{m\omega\hbar/2}(a^\dagger - a)$. Izračunaj še ravnovesno korelacijsko funkcijo $\langle F(t)F(t+\tau)\rangle$.

Naloga 39 (*1k.3.L1516*)**:** Izračunaj operator A v izrazu $f(a)\,\mathrm{e}^{za^\dagger} = \mathrm{e}^{za^\dagger}A$, kjer sta a in $a^\dagger$ kanonična bozonska operatorja, z pa skalar.

Naloga 40 (*1k.4.L1516*)**:** Imejmo fermionski $X = c_4^\dagger c_3 c_2^\dagger c_1$. (a) Izračunaj X^2 in $(X^\dagger)^2$. (b) Izračunaj in poenostavi operator $D(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda(X^\dagger - X)}$.

Naloga 41 (*1i.1.L1516*)**:** Za operator $A = f(c, c^\dagger)$, ki je odvisen od fermionskih operatorjev, velja $A^2 = \mathbb{1}$. (a) Izračunaj in poenostavi $\mathrm{e}^{\lambda A}$. (b) Najdi kakšen primer takšnega A-ja.

Naloga 42 (*2i.1.L1516*)**:** Označimo $\rho = \exp[-\beta(E_1 a_1^\dagger a_1 + E_2 a_2^\dagger a_2)]$, kjer so a_j bozonski operatorji. (a) Izračunaj $Z = \mathrm{tr}\rho$. (b) Izračunaj tudi pričakovano vrednost energije $\frac{1}{Z}\mathrm{tr}\{(E_1 a_1^\dagger a_1 + E_2 a_2^\dagger a_2)\rho\}$.

Naloga 43: S fermionskimi operatorji definirajmo $J_\mathrm{x} := \frac{1}{2}(c_\uparrow^\dagger c_\downarrow + c_\downarrow^\dagger c_\uparrow)$, $J_\mathrm{y} := \frac{1}{2\mathrm{i}}(c_\uparrow^\dagger c_\downarrow - c_\downarrow^\dagger c_\uparrow)$ in $J_\mathrm{z} := \frac{1}{2}(n_\uparrow - n_\downarrow)$. Izračunaj komutatorje $[J_\mathrm{x}, J_\mathrm{y}]$, $[J_\mathrm{y}, J_\mathrm{y}]$ in $[J_\mathrm{z}, J_\mathrm{x}]$.

Naloga 44: S fermionskimi operatorji definirajmo $L_\mathrm{x} := \frac{1}{2}(c_\uparrow^\dagger c_\downarrow^\dagger + c_\downarrow c_\uparrow)$, $L_\mathrm{y} := \frac{1}{2\mathrm{i}}(c_\uparrow^\dagger c_\downarrow^\dagger - c_\downarrow c_\uparrow)$ in $L_\mathrm{z} := \frac{1}{2}(n_\uparrow + n_\downarrow - 1)$. Izračunaj komutatorje $[L_\mathrm{x}, L_\mathrm{y}]$, $[L_\mathrm{y}, L_\mathrm{y}]$ in $[L_\mathrm{z}, L_\mathrm{x}]$.

Naloga 45: Uporabi izraze iz besedila nalog 43 in 44 ter izračunaj operator $\mathbf{J}^2 := J_\mathrm{x}^2 + J_\mathrm{y}^2 + J_\mathrm{z}^2$, in $\mathbf{L}^2 := L_\mathrm{x}^2 + L_\mathrm{y}^2 + L_\mathrm{z}^2$.

2.4 Diagonalizacije

Naloga 46:

(a) Poišči lastna stanja fermionov, ki jih opisuje $H = Ec^\dagger c$.

(b) Izračunaj povprečno število delcev v velekanoničnem stanju $\rho \sim \mathrm{e}^{-\beta(H-\mu n)}$.

Naloga 47: Diagonaliziraj Hamiltonijan $H = \varepsilon(c_1^\dagger c_1 - c_2^\dagger c_2) + \Delta(c_1^\dagger c_2^\dagger + c_2 c_1)$.

Naloga 48: Poišči lastna stanja in energije za $H = \varepsilon(c_1^\dagger c_1 - c_2^\dagger c_2) + \Delta(c_1 c_2^\dagger + c_2 c_1^\dagger)$.

Naloga 49 (*1k.4.L1112*): Izračunaj lastne energije Hamiltonijana

$$H = \varepsilon(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2 + c_3^\dagger c_3) + \Delta(c_1^\dagger c_2 + c_1^\dagger c_3 + c_2^\dagger c_3 + \text{h.c.}), \tag{13}$$

kjer so $c_{1,2,3}$ trije fermionski operatorji.

Naloga 50: Z linearno transformacijo fermionov $c_{1,2}$ diagonaliziraj Hamiltonijan

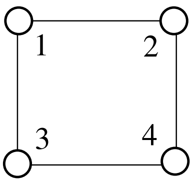
$$H = \varepsilon(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2) + \Delta(c_1^\dagger c_2^\dagger + c_2 c_1). \tag{15}$$

Naloga 51 (*1k.2.L1213*): Izračunaj $\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle$, kjer je začetno stanje v Fockovem prostoru fermionov enako $|\psi(0)\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$, $|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\psi(0)\rangle$, Hamiltonov operator pa je $H = \epsilon(c_1^\dagger c_1 - c_2^\dagger c_2) + U c_1^\dagger c_1 c_2^\dagger c_2$.

Naloga 52 (*2i.4.L1112*): Izračunaj čim več lastnih energij za sistem 4 spinov 1/2 s Hamiltonijanom

$$H = \sum_k \sigma_k^{\mathrm{x}}\sigma_{k+1}^{\mathrm{x}} + \sigma_k^{\mathrm{y}}\sigma_{k+1}^{\mathrm{y}},$$

kjer vsota teče po vseh prečkah na sliki.



Sistem bi lahko rešili z Jordan-Wignerjevo transformacijo in Fourierom, tokrat pa bomo uporabili simetrije. H namreč komutira z operatorjem $Z = \sigma_1^{\mathrm{z}} + \sigma_2^{\mathrm{z}} + \sigma_3^{\mathrm{z}} + \sigma_4^{\mathrm{z}}$ in operatorjema parnosti P_x v smeri x, in P_y v smeri y (operatorja parnosti zamenjata identitete spinov, kot bi naredili zrcaljenje čez ustrezno simetrijsko ravnino). Zapiši bazne vektorje, ki so hkrati tudi lastni vektorji vseh treh simetrijskih operacij. Pri računanju lastnih energij uporabi dejstvo, da ima v takšni bazi Hamiltonijan bločno strukturo.

Naloga 53 (*1k.3.L1213*): Nobelova nagrada leta 2012 je bila med drugim podeljena (S. Haroche, D. J. Wineland) za kvantne eksperimente, ki jih lahko opišemo s Hamiltonovim operatorjem

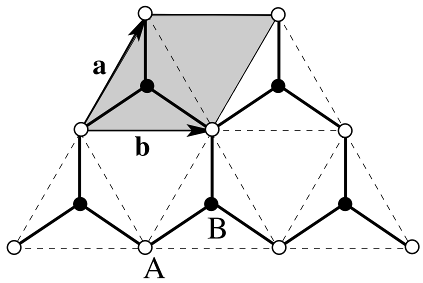
$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \epsilon\, c^\dagger c + J\,(a^\dagger c + \text{h.c.}). \tag{20}$$

Takšen H predstavlja sklopljen sistem elektromagnetnega polja (bozonski operator a) in dvonivojskega atoma (fermionski operator c). Pokaži, da skupno število kvantov $N = a^\dagger a + c^\dagger c$ komutira s H. Izračunaj lastne energije sistema. Prostor stanj razpenja direktni produkt bozonske in fermionske baze, fermionski in bozonski operatorji pa med seboj komutirajo.

Naloga 54 (*2k.3.L1213*): Grafen imenujemo 2D strukturo ogljikovih atomov, ki zasedajo mesta na heksagonalni mreži (slika). Celotno strukturo dobimo s tlakovanjem ravnine z osnovno celico (osenčen trapez), ki jo razpenjata bazna vektorja **a** in **b**. V vsaki osnovni celici sta dva elektrona; vsak je lahko ali na mestu tipa "A", ali na mestu tipa "B". V približku tesne vezi so sklopljena le sosednja mesta (tri mastne prečke iz središča vsakega trikotnika na sliki), tako da lahko sistem opišemo s Hamiltonijanom (spina ne upoštevamo),

$$\begin{aligned} H = &- t \sum_j \left\{ \left[\psi_B^\dagger(\mathbf{r}_j) + \psi_B^\dagger(\mathbf{r}_j - \mathbf{a}) + \psi_B^\dagger(\mathbf{r}_j - \mathbf{b}) \right] \psi_A(\mathbf{r}_j) + \text{ h.c.} \right\} + \\ &+ \varepsilon \sum_j \left\{ n_A(\mathbf{r}_j) + n_B(\mathbf{r}_j) \right\}, \end{aligned} \tag{22}$$

kjer je $\mathbf{r}_j = n_{1j}\mathbf{a} + n_{2j}\mathbf{b}$ vektor do $j-$te osnovne celice. Izračunaj lastne energije elektronov



Slika 1: Heksagonalna struktura ogljikovih atomov v grafenu.

v grafenu. *Namig: zaradi periodičnosti se splača H transformirati v momentni prostor, $\psi_\alpha(\mathbf{r}_j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_\mathbf{k} c_{\mathbf{k}\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}, \alpha = \{A,B\}$. Z robnimi pogoji se ni potrebno ukvarjati. V izrazu za H smo nekoliko "grdo" pri argumentih vektorjev atomov B izpustili premik za $\mathbf{v} := (\mathbf{a}+\mathbf{b})/3$, kar je ekvivalentno temu, da smo za atome B izhodišče vzeli v težišču trikotnika, za atome A pa v ogljišču trikotnika. To si lahko privoščimo, ker v Fourieru to prinese samo fazni faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}$ k $c_{\mathbf{k}B}$, kar pa ne spremeni antikomutacijskih zvez. Velja tudi običajna zveza $\frac{1}{N}\sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{0}}$.*

Naloga 55 (*1k.2.L1314*): Poišči lastne energije in lastna stanja za fermionski sistem,

$$H = c_1 c_2^\dagger + c_2 c_1^\dagger + \Delta(c_1 c_2 + c_2^\dagger c_1^\dagger).$$

Naloga 56 (*1k.4.L1415*): Zunanje elektrone v molekuli iz istih atomov, npr. H_2, O_2, lahko opišemo s Hamiltonijanom $H = H_U + H_t$, kjer

$$H_U = U(n_{1\uparrow}n_{1\downarrow} + n_{2\uparrow}n_{2\downarrow}), \qquad H_t = t(c_{1\uparrow}^\dagger c_{2\uparrow} + c_{2\uparrow}^\dagger c_{1\uparrow} + c_{1\downarrow}^\dagger c_{2\downarrow} + c_{2\downarrow}^\dagger c_{1\downarrow}), \tag{23}$$

in H_U predstavlja Coulombski odboj med dvema elektronoma na istem atomu, H_t pa interakcijo med elektronoma na različnih atomih. U in t sta pozitivni konstanti, indeksa 1 in 2 se nanašata na zunanjo orbitalo na prvem oz. drugem atomu, puščice pa na spin elektrona. H ohranja skupno število elektronov, tako da se bomo omejili na podprostor z dvema elektronoma (nevtralna molekula). (a) Kolikšna je dimenzija podprostora dveh elektronov? (b) Poišči lastna stanja in lastne energije na tem podprostoru.

Naloga 57: Za fermionski $H = Un_\uparrow n_\downarrow$ izračunaj fazno vsoto $Z := \mathrm{tr}\,\mathrm{e}^{-\beta(H-\mu N)}$, in skiciraj kako se obnaša povprečna zasedenost $\langle N\rangle := \frac{1}{Z}\mathrm{tr}(N\mathrm{e}^{-\beta(H-\mu N)})$, kjer je $N = n_\uparrow + n_\downarrow$, v odvisnosti od μ.

Naloga 58: Uporabi Fourierovo transformacijo in diagonaliziraj kinetični del Hubbardovega Hamiltonijana na L mestih, torej $H = -t\sum_{j,\sigma}(c^\dagger_{j,\sigma}c_{j+1,\sigma} + \text{h.c.})$.

Naloga 59: V približku povprečnega polja bomo rešili 1D Hubbardov model,

$$H = -t\sum_{j\sigma}(c^\dagger_{j,\sigma}c_{j+1,\sigma} + \text{h.c.}) + U\sum_j n_{j\uparrow}n_{j\downarrow}.$$

(a) Težavo predstavlja interakcijski del, ki je kvartični v fermionih. Zapiši $n_{j\sigma} = \langle n_{j\sigma}\rangle + (n_{j\sigma} - \langle n_{j\sigma}\rangle)$, in zanemari člene, ki so kvadratni v (upamo) majhnem $(n_{j\sigma} - \langle n_{j\sigma}\rangle)$. Poišči enodelčne energije dobljenega kvadratnega Hamiltonijana, in zapiši energijo osnovnega stanja kot funkcijo zapolnjenost obeh spinov, $\langle n_\uparrow\rangle$ in $\langle n_\downarrow\rangle$. (b) Za primer polzapolnjenosti, $\langle n_\uparrow\rangle + \langle n_\downarrow\rangle = 1$, si poglej, kolikšen je $\langle n_\uparrow\rangle$ v osnovnem stanju pri različnih U.

Naloga 60 (*1i.4.L1415*):

(a) Za bozonski Hamiltonijan $H = E_1 b_1^\dagger b_1 + E_2 b_2^\dagger b_2$ definirajmo linearni operator A_H, ki deluje na poljubnem operatorju g kot komutator, $A_H(g) = [g, H]$. Pokaži, da sta $b_{1,2}$ lastna operatorja A_H (torej, da velja $A_H(b_k) = \lambda_k b_k$) in zapiši pripadajoči lastni vrednosti.

(b) Sistem dveh bozonov s $H = \epsilon a_1^\dagger a_1 + \Delta\,(a_1 a_2^\dagger + a_2 a_1^\dagger)$ zapiši v diagonalni obliki iz (a), pri čemer $E_{1,2}$ in $b_{1,2}$ poišči z uporabo spoznanja iz (a), kjer za nastavek za $b_{1,2}$ vzameš linearno kombinacijo a_1 in a_2.

Naloga 61 (*1k.2.L1516*): Diagonaliziraj (poišči lastne energije in vektorje): (a) fermionski $H = c_1 c_2^\dagger + c_2 c_1^\dagger$, in (b) bozonski $H = a_1 a_2^\dagger + a_2 a_1^\dagger$ na podprostoru z $N := n_1 + n_2 <= 2$.

2.5 Spinski sistemi

Naloga 62: Diagonaliziraj spinsko verigo

$$H = \sum_j h^{\text{xy}}_{j,j+1}, \quad h^{\text{xy}}_{j,j+1} = \frac{1+\gamma}{2}\sigma^x_j\sigma^x_{j+1} + \frac{1-\gamma}{2}\sigma^y_j\sigma^y_{j+1} + \frac{h}{2}(\sigma^z_j + \sigma^z_{j+1}), \tag{25}$$

na verigi z L mesti.

Naloga 63: Transformacija Holstein-Primakoffa med spinskimi operatorji S in bozonskimi a je podana s predpisom $S^- := a^\dagger\sqrt{2S - a^\dagger a}$, $S^- := \sqrt{2S - a^\dagger a}\, a$, $S^{\rm z} := S - a^\dagger a$. Pokaži, da so komutatorji med tako definiramimi S-ji enaki, kot med spinskimi operatorji, torej $[S^{\rm z}, S^+] = S^+$, $[S^+, S^-] = 2S^{\rm z}$.

Naloga 64: Za feromagnetni Heisenbergov Hamiltonijan $H = -J\sum_j \frac{1}{2}(S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+) + S_j^{\rm z} S_{j+1}^{\rm z}$, kjer je $S_j^\pm := S_j^{\rm x} \pm {\rm i} S_j^{\rm y}$, poišči nizkoenergijske vzbuditve za primer $S \gg 1$. Uporabi transformacijo Holstein-Primakoffa in razvoj okoli osnovnega stanja.

Naloga 65 (*2k.2.L1112*)**:** Za spinsko verigo z lokalnimi sklopitvami, $H = \sum_j h_j$, definiramo tok magnetizacije J_k na mestu k kot $J_k = {\rm i}\,[\sigma_k^{\rm z}, h_k]$. Izračunaj J_k za primer $h_j = \sigma_j^{\rm x}\sigma_{j+1}^{\rm x} + \sigma_j^{\rm y}\sigma_{j+1}^{\rm y}$. Uporabi Jordan-Wignerjevo transformacijo, $c_j = \sigma_1^{\rm z}\cdots\sigma_{j-1}^{\rm z}\sigma_j^-$, kjer je $\sigma_j^- = (\sigma_j^{\rm x} - {\rm i}\,\sigma_j^{\rm y})/2$, in zapiši tok J_k še s fermionskimi operatorji.

Naloga 66 (*2k.4.L1112*)**:** Z Jordan-Wignerjevo transformacijo, kateri sledi Fourierova transformacija iz realnega (operatorji c_j) v momentni prostor (operatorji d_k), $c_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_k {\rm e}^{{\rm i}\,kj} d_k$, lahko Hamiltonijan $H = -\sum_j(\sigma_j^{\rm x}\sigma_{j+1}^{\rm x} + \sigma_j^{\rm y}\sigma_{j+1}^{\rm y})$ prepišemo (do aditivne konstante natančno) v $H = \sum_k \epsilon_k d_k^\dagger d_k$, kjer je $\epsilon_k = 4\cos(k)$ (v vseh izrazih teče k čez n vrednosti na intervalu $[0, 2\pi]$).

- Izračunaj Heisenbergovo sliko momentnih operatorjev, to je $d_k(t) = {\rm e}^{{\rm i}Ht} d_k {\rm e}^{-{\rm i}Ht}$. *Nasvet: najprej poizkusi izračunati* ${\rm e}^{{\rm i}\epsilon_q d_q^\dagger d_q} d_k {\rm e}^{-{\rm i}\epsilon_q d_q^\dagger d_q}$.

- Izračunaj korelacijsko funkcijo $g(t) = \langle 0\ldots 0|c_m c_l^\dagger(t)|0\ldots 0\rangle$ v kontinuumski limiti, ko lahko $\sum_k$ nadomestiš z integralom. Stanje $|0\ldots 0\rangle$ je osnovno stanje H [korelacijska funkcija $g(t)$ je povezan z verjetnostjo, da se fermion, ki je ob $t = 0$ na l-tem mestu, nahaja ob času t na m-tem mestu]. *Koristiti utegne* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} {\rm d}x\, {\rm e}^{{\rm i}(xp + t\cos x)} = {\rm i}^p J_p(t)$, *kjer je* J_p *Besslova funkcija,* p *pa celo število.*

Naloga 67 (*1i.4.L1112*)**:** Zanimajo nas nizkoenergijske vzbuditve 1d antiferomagnetne Heisenbergove verige s spinom S (ki je veliko celo ali polcelo število),

$$H = \sum_j \frac{1}{2}(S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+) + S_j^{\rm z} S_{j+1}^{\rm z}, \tag{27}$$

kjer je $S_j^\pm = S_j^{\rm x} \pm {\rm i} S_j^{\rm y}$. Dober približek osnovnega stanja je stanje, v katerem je vsak drugi spin obrnjen v nasprotno smer, $|S, -S, S, -S, \ldots\rangle$. Ker želimo uporabiti isto transformacijo Holstein-Primakoffa, kot pri feromagnetu, $S_j^{\rm z} = S - a_j^\dagger a_j$, $S_j^+ \approx \sqrt{2S}\, a_j$, izvedemo sledeč postopek: (i) na spinskih operatorjih na sodih mestih naredimo kanonično transformacijo $S^{\rm x} \to S^{\rm x}$, $S^{\rm y} \to -S^{\rm y}$ in $S^{\rm z} \to -S^{\rm z}$, (ii) na dobljenem Hamiltonijanu uporabimo trasformacjo H.-P., (iii) na nizkoenergijskem Hamiltonijanu, zapisanem z bozonskimi operatorji, naredimo Fourierovo transformacijo, (iv) diagonaliziramo dobljeni Hamiltonijan.

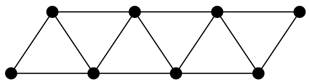
Naloga 68 (*2k.2.L1213*)**:** Uporabi Jordan-Wignerjevo transformacijo in zapiši sledeči Hamiltonijan,

$$H = h_{1,4} + h_{2,4} + h_{3,4}, \qquad h_{j,k} = \sigma_j^{\rm x}\sigma_k^{\rm x} + \sigma_j^{\rm y}\sigma_k^{\rm y}, \tag{30}$$

s fermionskimi operatorji.

Naloga 69 (*2k.1.L1314*): Uporabi Jordan-Wignerjevo transformacijo in s fermionskimi operatorji zapiši Hamiltonijan na trikotni lestvi,

$$H=\sum_{j=1}^{7}h_{j,j+1}+\sum_{j=1}^{6}h_{j,j+2},\qquad h_{j,k}=\sigma_j^{\mathrm{x}}\sigma_k^{\mathrm{x}}+\sigma_j^{\mathrm{y}}\sigma_k^{\mathrm{y}}.$$



Naloga 70 (*2k.4.L1314*):

(a) Zanima nas najmanjša lastna vrednost E_0 hermitskega operatorja H na končnem Hilbertovem prostoru. Dokaži, da je najmanjša lastna vrednost H enaka najmanjšemu diagonalnemu elementu matrike, $\min(H_{j,j})$, kjer je minimizacija mišljena po vseh možnih bazah, v katerih lahko zapišemo H.

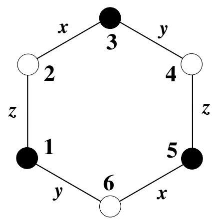
(b) Imejmo antiferomagnetno izotropno Heisenbergovo spinsko verigo s periodičnimi robnimi pogoji,

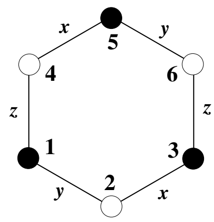
$$H=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^-+\sigma_j^-\sigma_{j+1}^+)+\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z.$$

(i) Izračunaj energijo $\langle\psi|H|\psi\rangle$ Neelovega stanja $|\psi\rangle=|0101\ldots01\rangle$. Ali je $|\psi\rangle$ lastno stanje H?

(ii) Energija Neelovega stanja je zgornja meja za energijo osnovnega stanja E_0. Poišči spodnjo mejo za E_0: dokaži, da je najmanjši diagonalni matrični element (v smislu (a)) operatorja $\frac{1}{2}(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^-+\sigma_j^-\sigma_{j+1}^+)+\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z$ enak -3, in potem uporabi (a). *Možen namig: seštevanje vrtilnih količin.*

Naloga 71 (*2k.3.L1415*): Uporabi Jordan-Wignerjevo transformacijo in s fermionskimi operatorji čim enostavneje zapiši $H=J_{\mathrm{x}}\sum_{j,k\in x}\sigma_j^{\mathrm{x}}\sigma_k^{\mathrm{x}}+J_{\mathrm{y}}\sum_{j,k\in y}\sigma_j^{\mathrm{y}}\sigma_k^{\mathrm{y}}+J_{\mathrm{z}}\sum_{j,k\in z}\sigma_j^{\mathrm{z}}\sigma_k^{\mathrm{z}}$. Spini so na ogljiščih šestkotnika, dvodelčne sklopitve na stranicah, tip sklopitve pa je označen na sliki. Uporabi obhod (oštevilčenje) na levi sliki, in posebej tistega na desni sliki.





Naloga 72 (*2i.1.L1415*): Označimo s $\sigma_j^{\mathrm{x,y,z}}$ običajne Paulijeve matrike na j-tem mestu, in definirajmo $c_j:=(\prod_{r<j}\sigma_r^{\mathrm{z}})\sigma_j^{\mathrm{x}}$, in $d_j:=(\prod_{r<j}\sigma_r^{\mathrm{z}})\sigma_j^{\mathrm{y}}$. (a) Izračunaj vse antikomutatorje med pari c_j, med pari d_j, ter križne med c_j in d_r. (b) Izrazi spinski $H=\sum_j\sigma_j^{\mathrm{x}}\sigma_{j+1}^{\mathrm{x}}+\sigma_j^{\mathrm{y}}\sigma_{j+1}^{\mathrm{y}}$ z operatorji c_j in d_j.

Naloga 73 (*2i.4.L1415*): Imejmo spinski Hamiltonijan $H=-\sum_j S_j$, kjer je $S_j=\sigma_{j-1}^{\mathrm{z}}\sigma_j^{\mathrm{x}}\sigma_{j+1}^{\mathrm{z}}$. (a) Definirajmo $U_1=\prod_{j\in\mathrm{sodi}}\sigma_j^{\mathrm{x}}$ in $U_2=\prod_{j\in\mathrm{lihi}}\sigma_j^{\mathrm{x}}$. Pokaži, da sta $U_{1,2}$

simetriji sistema, torej, da velja $UHU^\dagger = H$. (b) Izračunaj komutatorje $[S_j, S_k]$. (c) Dokaži, da je stanje $|g\rangle = (\prod_j C_{j,j+1})|++\cdots+\rangle$, kjer je $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ in $C_{j,j+1} = |0\rangle\langle 0|_j \otimes \mathbb{1}_{j+1} + |1\rangle\langle 1|_j \otimes \sigma^{\rm z}_{j+1}$, osnovno stanje H.

Naloga 74 (*2k.1.L1516*): (a) Definirajmo $S^+ := \sqrt{2S}a^\dagger$, $S^- := \sqrt{2S}(a - a^\dagger a^2/(2S))$, in $S^{\rm z} := a^\dagger a - S$, kjer sta a in $a^\dagger$ kanonična bozonska operatorja. Izračunaj komutatorje $[S^{\rm z}, S^\pm]$ in $[S^+, S^-]$. (b) Izrazi operator $C_1 := \frac{1}{2}(S^+S^- + S^-S^+) + S^{\rm z}S^{\rm z}$ z bozonskimi. Enako naredi za $C_2 := \frac{1}{2}(S^+S^- + \text{h.c.}) + S^{\rm z}S^{\rm z}$. (c) Aproksimiraj feromagnetni hamiltonijan $H = -J\sum_j \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+1}$ v bližini osnovnega stanja do najnižjega reda v $S \gg 1$, tako da uporabiš transformacijo iz (a).

Naloga 75 (*2k.3.L1516*): Imejmo spinsko verigo $H = \sum_j h_{j,j+1}$, kjer je $h_{j,j+1} = -(1+\gamma)\sigma^x_j\sigma^x_{j+1} - (1-\gamma)\sigma^y_j\sigma^y_{j+1} - \Delta\sigma^z_j\sigma^z_{j+1} + \frac{b}{2}(\sigma^z_j + \sigma^z_{j+1})$. (a) Uporabi Jordan-Wignerjevo transformacijo in zapiši H s fermionskimi operatorji (z robnimi členi se ni treba ukvarjati). (b) Ali H poleg energije ohranja še kakšno drugo enostavno količino? (c) Poiskati spekter H je komplicirano; tukaj nas bodo zanimala samo morebitna produktna osnovna stanja v primeru $\gamma = \sqrt{2}$ in $b = 1$ (pri drugih vrednostih je podobno). Razišči, ali obstaja kakšna vrednost Δ pri kateri je osnovno stanje H produktno stanje $|\psi\rangle = |\alpha\rangle^{\otimes n}$, kjer je n število mest, $|\alpha\rangle$ pa stanje enega spina. Kakšen je tedaj $|\alpha\rangle$? [*Namig: pomisli, kako je v primeru produktnega osnovnega stanja s* $h_{j,j+1}|\psi\rangle$].

Naloga 76 (*2i.2.L1516*): Uporabi Jordan-Wignerjevo transformacijo in s Paulijevimi matrikami zapiši t.i. t-V Hamiltonijan,

$$H = \sum_{j=1}^{L} -t(c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.c.}) + V n_j n_{j+1}.$$

Naloga 77 (*2i.3.L1516*): Obravnavaj fermionski t-V Hamiltonijan,

$$H = \sum_{j=1}^{L} -t(c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.c.}) + V n_j n_{j+1},$$

v približku povprečnega polja. (a) Najprej zapiši $n_j = \langle n_j\rangle + (n_j - \langle n_j\rangle)$, in v H obdrži samo člene, ki so linearni v (majhnem) $(n_j - \langle n_j\rangle)$. (b) Uporabi Fourierovo transformacijo in izračunaj enodelčne energije dobljenega kvadratnega H. (c) V kontinuumski limiti $L \to \infty$ izrazi energijsko gostoto v osnovnem stanju s povprečno zasedenostjo $\bar{n} = \langle n_j\rangle$. Kolikšna bo zasedenost osnovnega stanja v limit $V \gg t$, in kolikšna v limit $t \gg V$?

2.6 Wickov izrek

Naloga 78: Izračunaj pričakovani vrednosti $\langle\phi_0|c^\dagger_{k\sigma}c_{p\sigma'}|\phi_0\rangle$ in $\langle\phi_0|c_{k\sigma}c^\dagger_{p\sigma'}|\phi_0\rangle$ v osnovnem stanju Fermijevega plina $|\phi_0\rangle$.

Naloga 79: Izračunaj pričakovano vrednost $\langle\phi_0|c^\dagger_{k\sigma}c^\dagger_{q\sigma}c_{q'\sigma}c_{k'\sigma}|\phi_0\rangle$ v osnovnem stanju Fermijevega plina.

Naloga 80: V osnovnem stanju Fermijevega plina izračunaj:

(a) $\langle\phi_0|c^\dagger_{k,\sigma}c_{k+q,\sigma}c^\dagger_{k',\sigma'}c_{k'-q,\sigma'}|\phi_0\rangle$.

(b) $\langle\phi_0|c^\dagger_{k+q,\sigma}c^\dagger_{k'-q,\sigma'}c_{k',\sigma'}c_{k,\sigma}|\phi_0\rangle$.

(c) $\sum_{k,q,\sigma,\sigma'}\langle\phi_0|n_{k,\sigma}n_{q,\sigma'}|\phi_0\rangle$.

Naloga 81 (*2k.3.L1112*): Uporabi Wickov izrek in izračunaj pričakovano vrednost

$$\langle c^\dagger_{k+q,\uparrow}c^\dagger_{k'-q,\uparrow}c^\dagger_{k'',\downarrow}c_{k,\uparrow}c_{k',\uparrow}c_{k'',\downarrow}\rangle$$

v osnovnem stanju Fermijevega plina. $c_{k,\uparrow}$ in $c_{k,\downarrow}$ so standardni fermionski operatorji v momentnem prostoru za spin navzgor oz. navzdol.

Naloga 82 (*1i.3.L1213*): Zapiši dvodelčni "hard-core" potencial,

$$V(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}) = \begin{cases} U & \text{če } |\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|<R \\ 0 & \text{sicer} \end{cases},$$

v formalizmu druge kvantizacije. Uporabi reprezentacijo v momentnem prostoru z ravnimi valovi za bazo enodelčnih stanj. Z Wickovim izrekom izračunaj tudi pričakovano vrednost potenciala v osnovnem stanju Fermijevega plina pri temperaturi nič. [$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x$]

Naloga 83 (*2k.3.L1314*): Imejmo fermionsko stanje $|\mathrm{BCS}\rangle = \prod_k(u_k + v_k c^\dagger_{-k\downarrow}c^\dagger_{k\uparrow})|\varnothing\rangle$, kjer za realna parametra velja $u_k^2+v_k^2=1$ in $u_k=u_{-k}$ ter $v_k=v_{-k}$. Pokaži, da so operatorji definirani z $\alpha_{k\uparrow}=u_kc_{k\uparrow}+v_kc^\dagger_{-k\downarrow}$ in $\alpha_{-k\downarrow}=u_kc_{-k\downarrow}-v_kc^\dagger_{k\uparrow}$ kanonični, in da je za njih $|\mathrm{BCS}\rangle$ vakuum, torej $\alpha_{k\sigma}|\mathrm{BCS}\rangle=0$, tako da lahko uporabimo Wickov izrek.

Naloga 84 (*2k.2.L1314*): Uporabi Wickov izrek ter rezultat naloge 83 in izračunaj $\langle\mathrm{BCS}|n_{k\uparrow}n_{q\downarrow}|\mathrm{BCS}\rangle$, kjer je $n_{k\sigma}=c^\dagger_{k\sigma}c_{k\sigma}$.

Naloga 85 (*1i.3.L1314*): Uporabi Wickov izrek in izračunaj gostotno korelacijsko funkcijo definirano z $\langle\mathrm{BCS}|n_qn_{-q}|\mathrm{BCS}\rangle$, kjer je $|\mathrm{BCS}\rangle=\prod_k(u_k+v_kc^\dagger_{-k\downarrow}c^\dagger_{k\uparrow})|\varnothing\rangle$, in $n_q=\sum_{k,\sigma}c^\dagger_{k,\sigma}c_{k+q,\sigma}$. Operatorji $c_{k,\sigma}$ so standardni fermionski, za realne parametre v definiciji $|\mathrm{BCS}\rangle$ pa velja $u_k^2+v_k^2=1$ in $u_k=u_{-k}$ ter $v_k=v_{-k}$. Stanje $|\mathrm{BCS}\rangle$ je vakuum za kanonične operatorje $\alpha_{k,\sigma}$, ki so dani z $\alpha_{k\uparrow}=u_kc_{k\uparrow}+v_kc^\dagger_{-k\downarrow}$ in $\alpha_{-k\downarrow}=u_kc_{-k\downarrow}-v_kc^\dagger_{k\uparrow}$.

Naloga 86 (*2k.1.L1415*): Zapiši osnovno stanje $|\mathrm{g}\rangle$ Hamiltonijana $H=\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}(f_1^\dagger f_1 - f_2^\dagger f_2)+\varepsilon\mathbb{1}$ v Fockovem prostoru fermionov f_j. Pričakovane vrednosti v tem osnovnem stanju bi radi računali z Wickovim izrekom. Ali lahko razdelimo fermionske operatorje na dve skupini, ki bosta anihilirali $|\mathrm{g}\rangle$ (oz. $\langle\mathrm{g}|$), in bo torej za njih veljal Wickov izrek? Katere elementarne kontrakcije (take med dvema) med temi operatorji so neničelne? Uporabi Wickov izrek in izračunaj $\langle\mathrm{g}|c_1^\dagger c_1 c_2^\dagger c_2|\mathrm{g}\rangle$, kjer je $c_1=uf_1-vf_2$ in $c_2^\dagger=vf_1+uf_2$ (u,v sta realna parametra za katera velja $u^2+v^2=1$).

Naloga 87 (*2k.2.L1415*): Pričakovano vrednost iz naloge 86 lahko izračunamo tudi brez Wickovega izreka, in sicer tako, da $|\mathrm{g}\rangle$ zapišemo v Fockovem prostoru fermionov c_j (zveza med f_j in c_j v nalogi 86 ohranja antikomutacijske zveze, torej so tudi c_j fermionski), saj je v tem prostoru delovanje c-jev enostavno. Zapiši torej osnovno stanje $|\mathrm{g}\rangle$ iz naloge 86 v bazi stanj z dobrimi zasedbenimi števili fermionov c_j in nato izračunaj omenjeno pričakovano vrednost [*Osnovno stanje je enolično določeno s kompletnim setom operatorjev, ki ga anihilirajo. To pomeni, da ga lahko npr. dobiš z delovanjem ustreznega operatorja na primernem Fockovem stanju fermionov c_j. Kakorkoli boš prišel do $|\mathrm{g}\rangle$, pokaži, da je to res osnovno stanje.*].

Naloga 88 (*1i.1.L1415*): Z Wickovim izrekom izračunaj pričakovano vrednost izraza $\sum_{j,k,m,n=1}^{N}\langle\psi|c_j^\dagger c_k c_m^\dagger c_n|\psi\rangle$, kjer je $|\psi\rangle = |1100\ldots 0\rangle$ stanje N fermionov.

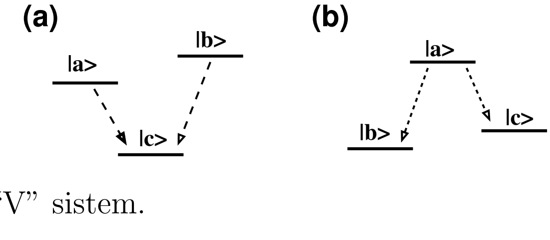
Naloga 89 (*2i.2.L1415*): Operator lokalnega toka $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ je dan z $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2m\,\mathrm{i}}\{\psi^\dagger(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}) - [\nabla\psi^\dagger(\mathbf{r})]\psi(\mathbf{r})\}$, kjer je $\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ operator polja, $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})/\sqrt{V}$, $c_{\mathbf{k}}$ je pa anihilacijski operator. (a) Izračunaj pričakovano vrednost $\langle\mathbf{j}(\mathbf{r})\rangle$ v osnovnem stanju plina prostih elektronov. (b) Zapiši operator toka v momentnem prostoru, $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \int \mathrm{d}V\,\mathbf{j}(\mathbf{r})\exp(-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$. (c) Izračunaj $\langle\mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}')\rangle$ v osnovnem stanju plina prostih fermionov (vsote po $\mathbf{k}$-jih ni potrebno izvrednotiti). Za računanje pričakovanih vrednosti uporabi Wickov izrek.

Naloga 90 (*2k.2.L1516*): Imejmo fermionsko stanje $|\psi\rangle := |0101\cdots 01; 0\cdots 0\rangle$, kjer imamo do "podpičja" N mest (polovica od teh je nezasedenih), za podpičjem pa še N praznih. (a) Zapiši set kanoničnih operatorjev $\{\alpha_j\}$ za katere je $|\psi\rangle$ vakuum. (b) Izračunaj p_0, p_1 in p_2, kjer je $p_r := \sum_k \langle\psi|c_k^\dagger c_{k+r} c_k c_{k+r}^\dagger|\psi\rangle$ (lahko uporabiš kakršenkoli postopek).

Naloga 91 (*1i.2.L1516*): Imejmo $2N$ fermionskih operatorjev $c_k, k = 1,\ldots,2N$. Označimo z $|g\rangle$ Fockovo stanje, v katerem so zasedbena števila $n_k = 1$ za $k \le N$, in $n_k = 0$ za $k > N$. Stanje $|\psi\rangle$ je dano s predpisom $|\psi\rangle = c_{N+1}^\dagger c_{N+3}^\dagger \cdots c_{2N-1}^\dagger|g\rangle$ (N je sodo število). Izračunaj $C_r := \sum_{j=1}^{2N}\langle\psi|c_j^\dagger c_{j+r} c_{j+r}^\dagger c_j|\psi\rangle$ za $r = 0, 1, 2, 3$ (za fermione velja $c_{j+2N} \equiv c_j$).

2.7 Razno

Naloga 92: Zapiši časovno odvisno intenziteto izsevane svetlobe vzbujenih atomov za dve različni konfiguraciji lastnih stanj (glej sliko):



(a) Tako imenovani "V" sistem.

(b) Za "Λ" sistem.

V obeh primerih najprej komentiraj klasični rezultat, potem pa še kvantni račun, pri čemer nas zanima predvsem prisotnost interferenčnih oscilacij.

Naloga 93 (*1i.4.L1314*): Izračunaj in poenostavi stanje $|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\psi(0)\rangle$, kjer je $H = \sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger$, začetno stanje pa je $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |{+1}, n\rangle$. Bazna stanja Hilbertovega prostora $|s\rangle \otimes |n\rangle \equiv |s, n\rangle$ smo označili z lastno vrednostjo s operatorja σ^{z} in zasedbenim številom n bozona a.

Naloga 94 (*1k.3.L1415*): Definirajmo $Q = A \otimes c^\dagger$, kjer je $c^\dagger$ kreacijski operator za fermion, A pa nek operator, ki je funkcija bozonskih a in $a^\dagger$. Hilbertov prostor je direktni produkt bozonskega in fermionskega prostora.

(a) Pokaži, da je $Q^2 = (Q^\dagger)^2 = 0$.

(b) Iz Q in $Q^\dagger$ sestavimo Hamiltonijan s predpisom $H = \{Q, Q^\dagger\}$. Pokaži, da so $Q, Q^\dagger$ in $QQ^\dagger$ konstante gibanja, torej, da komutirajo s H.

(c) Dokaži, da so lastne vrednosti H nenegativne.

(d) Ali lahko na podlagi znanega spektra in lastnih stanj $H_1 = QQ^\dagger$ povemo kaj o spektru supersimetričnega partnerja $H_2 = Q^\dagger Q$?

Naloga 95 (*1i.4.L1516*): Uporabi transformacijo Holstein-Primakoffa in poišči približni izraz za lastne energije sistema sklopljenega spina in bozona, ki ga opisuje Hamiltonijan

$$H = -\omega S_{\mathrm{z}} + \omega a^\dagger a + \frac{\lambda}{\sqrt{2S}}(a + a^\dagger)(S^+ + S^-),$$

kadar je kvantno število velikosti spina S veliko, spin pa skoraj popolnoma polariziran v smeri navzgor. Računaj do ničtega reda v $1/S$, dobljeni H pa lahko poskusiš diagonalizirati tako, da bozone najprej zapišešeš z operatorji koordinate in momenta harmonskega oscilatorja, npr. $x = (a^\dagger + a)/\sqrt{2\omega}, p = \mathrm{i}(a^\dagger - a)\sqrt{\omega/2}$. Operatorji $S_{\mathrm{x,y,z}}$ in $S^\pm := S_{\mathrm{x}} \pm \mathrm{i}S_{\mathrm{y}}$ so spinski, a pa bozonski.

Naloga 96: Za začetni Hamiltonijan $H(\tau = 0) = a_1\sigma^{\mathrm{x}} + a_3\sigma^{\mathrm{z}}$ s pozitivnima $a_{1,3}$ izračunaj stacionarni $H(\tau \to \infty)$, kjer je $H(\tau)$ rešitev enačbe,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau} = [\eta(\tau), H(\tau)], \qquad \eta(\tau) = [H_{\mathrm{d}}(\tau), H(\tau)].$$

$H_{\mathrm{d}}(\tau)$ je "trenutni" diagonalni del $H(\tau)$, torej del, ki je sorazmeren σ^{z}.

Naloga 97: Hamiltonijan H, ki deluje na prostoru L fermionov zapišimo, kot $H = \sum_{j,k} C_{jk} c_j^\dagger c_k$, kjer so C_{jk} skalarni koeficienti, c_j pa standardni fermionski operatorji.

(a) A ima matrika C kakšno simetrijo, če je H hermitski?

(b) Definirajmo operator $\eta := [H_{\mathrm{d}}, H]$, kjer je $H_{\mathrm{d}} = \sum D_{jj} c_j^\dagger c_j$ diagonalni del Hamiltonijana H oz. je matrika D diagonalni del matrike C. Zapiši η v obliki $\eta = \sum_{jk} B_{jk} c_j^\dagger c_k$ in izračunaj B_{jk}.

(c) Z operatorjem η zapišimo tok v prostoru Hamiltonijanov zgornje oblike preko enačbe

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau} = [\eta(\tau), H(\tau)], \qquad \eta := [H_{\mathrm{d}}(\tau), H(\tau)],$$

kjer je $H_{\mathrm{d}}(\tau)$ definiran s trenutnim diagonalnim delom $H(\tau)$. Zapiši sistem diferencialnih enačb ki veljajo za $C_{jk}(\tau)$.

Naloga 98: Imejmo Hubbardov Hamiltonijan na dveh mestih (štirje fermioni) z neredom jakosti h,

$$H(0) = -t(c^\dagger_{1\uparrow}c_{2\uparrow} + c^\dagger_{1\downarrow}c_{2\downarrow} + \mathrm{h.c.}) + U(n_{1\uparrow}n_{1\downarrow} + n_{2\uparrow}n_{2\downarrow}) + h(-n_{1\uparrow} - n_{1\downarrow} + n_{2\uparrow} + n_{2\downarrow}).$$

(a) Pokaži, da H ohranja število fermionov s spinom gor, $N_\uparrow = n_{1\uparrow} + n_{2\uparrow}$, in tudi število fermionov s spinom dol, $N_\downarrow = n_{1\downarrow} + n_{2\downarrow}$.

(b) Na podprostoru z $N_{\uparrow,\downarrow} = 1$ poišči rešitev $H(\tau)$ enačbe

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau} = [\eta(\tau), H(\tau)], \qquad \eta := [H_{\mathrm{d}}(\tau), H(\tau)],$$

kjer je H_{d} diagonalni del v standardni Fockovi bazi, za začetni $H(0)$ pa vzemi Hubbarda pri $U = 0$ in $t = 1$.

3 Rešitve

Rešitev naloge 1: Za produktno stanje je reducirani gostotni operator projektor, $\rho_{\mathrm{A}} = \mathrm{tr}|\psi\rangle\langle\psi| = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. Za eno kubitni A ima ρ_{A} tako dve lastni vrednosti, od katerih je ena enaka 1, druga pa nič. Torej je dvo kubitno stanje $|\psi\rangle$ separabilno natanko tedaj, ko je $\det(\rho_{\mathrm{A}}) = 0$. Če zapišemo stanje kot $|\psi\rangle = R_{ij}|ij\rangle$, se pogoj elegantno zapiše kot $|\det R|^2 = 0$, kar se izvrednoti v $\alpha\delta - \gamma\beta = 0$.

Rešitev naloge 2: (a) Če uredimo bazo kot $\{|0_1 0_2\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle\}$, imamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Lahko eksplicitno izračunamo sled, $B = \sum_j \langle j|A|j\rangle_2$, ali pa še hitreje naredimo sled neposredno na A, $\mathrm{tr}_2(\sigma_1^x \sigma_2^z) = \sigma_1^x \mathrm{tr}_2(\sigma_2^z) = 0$.

Rešitev naloge 3: S Taylorjevim razvojem dobimo $\mathrm{e}^{-\beta H} = \cosh(\beta J)\mathbb{1} - \sinh(\beta J)\sigma_1^x\sigma_2^x$, kar da fazno vsoto $Z = 4\cosh(\beta J)$. Gostotni operator je tako $\rho = \frac{1}{4}(\mathbb{1} - \tanh(\beta J)\sigma_1^x\sigma_2^x)$, pričakovana vrednost energije pa $\langle H\rangle = -J\tanh(\beta J)$.

Rešitev naloge 4: (a) $\mathrm{tr}_2\,(A) = 0$, $\mathrm{tr}(A^2) = 8$, $\mathrm{tr}_2[(\sigma_2^{\mathrm{x}} + \sigma_2^{\mathrm{y}})A] = 2(\sigma_1^x - \sigma_1^y)$, (b) $|210\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\varphi_1\varphi_1\varphi_2\rangle^{\mathrm{I.}} + |\varphi_1\varphi_2\varphi_1\rangle^{\mathrm{I.}} + |\varphi_2\varphi_1\varphi_1\rangle^{\mathrm{I.}}\right)$ in $|1101\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\varphi_1\varphi_2\varphi_4\rangle^{\mathrm{I.}} - |\varphi_1\varphi_4\varphi_2\rangle^{\mathrm{I.}} + |\varphi_4\varphi_1\varphi_2\rangle^{\mathrm{I.}} - |\varphi_4\varphi_2\varphi_1\rangle^{\mathrm{I.}} + |\varphi_2\varphi_4\varphi_1\rangle^{\mathrm{I.}} - |\varphi_2\varphi_1\varphi_4\rangle^{\mathrm{I.}})$.

Rešitev naloge 5: Najprej izračunamo akcijo $\mathcal{L}$ na vseh štirih baznih elementih. Upoštevajoč $L^\dagger L = (\mathbb{1} - \sigma^z)/2$ in $LL^\dagger = (\mathbb{1} + \sigma^z)/2$, takoj dobimo $\mathcal{L}(\mathbb{1}) = 2\sigma^z$. Z $\sigma^+\sigma^x\sigma^- = 0$ dobimo $\mathcal{L}(\sigma^x) = -\sigma^x$, in podobno $\mathcal{L}(\sigma^y) = -\sigma^y$. Ker je $\sigma^+\sigma^z\sigma^- = -(\mathbb{1} + \sigma^z)/2$, imamo $\mathcal{L}(\sigma^z) = -2\sigma^z$. Ker so bazni elementi ortogonalni, lahko sedaj takoj zapišemo rezultat

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Rešitev naloge 6: Poenostavimo v $A = \sigma_1^x\sigma_2^y\sigma_3^z\sigma_4^x\sigma_5^y\sigma_6^z$, in potem dobimo $[A, \sigma_2^x\sigma_3^x] = 0$, kar skupaj s cikličnostjo za ostale člene, pripelje do $[A, H] = 0$. $A^2 = \mathbb{1}$, ker pomeni, da so lastne vrednosti ± 1.

Rešitev naloge 7: (a) $\rho_{1,\dots,n-1} = \frac{1}{2}(|0\cdots0\rangle\langle0\cdots0| + |1\cdots1\rangle\langle1\cdots1|)$, na n kubitih pa $\rho_n = \frac{1}{2}(|0\cdots0\rangle\langle0\cdots0| + |0\cdots0\rangle\langle0\cdots0| + |0\cdots0\rangle\langle1\cdots1| + |1\cdots1\rangle|0\cdots0\rangle)$. (b) Za B, ki je netrivialen na r mestih, imamo $\langle\psi_\pm|B|\psi_\pm\rangle = \mathrm{tr}(B\rho_r)$, kar da enak rezultat ne glede na to kateri ψ imamo.

Rešitev naloge 8: $\rho_r = \frac{1}{n}(|1\rangle\langle1| + (n-1)|0\rangle\langle0|)$, $\rho_{r,j} = \frac{1}{n}(|01\rangle\langle01| + |10\rangle\langle10| + |01\rangle\langle10| + |10\rangle\langle01| + (n-2)|00\rangle\langle00|)$.

Rešitev naloge 9:

$$P_{13} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rešitev naloge 10: (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}(|311\rangle^{I.} + |131\rangle^{I.} + |113\rangle^{I.})$, ki ga lahko formalno dobimo tudi s simetrizatorjem $S_+ = \frac{1}{N!}\sum_P P$. (b) Dolgovezen račun nam da stanje, ki se v II. kvantizaciji kompaktno zapiše kot $|111\rangle^{II.}$, in ki ga lahko dobimo precej enostavneje z upoštevanjem, da ni naš operator nič drugega kot $a_2^\dagger a_1$.

Rešitev naloge 11: (a) $-|01000\rangle$, (b) $|11100\rangle - z|101100\rangle$.

Rešitev naloge 12: (a) $|10010\rangle$, (b) $|111000\rangle + z|010100\rangle$.

Rešitev naloge 13: $\frac{1}{\sqrt{6}}[|134\rangle^{\mathrm{I.}} - |314\rangle^{\mathrm{I.}} + |341\rangle^{\mathrm{I.}} - |431\rangle^{\mathrm{I.}} + |413\rangle^{\mathrm{I.}} - |143\rangle^{\mathrm{I.}}]$ oz. npr. v koordinatni reprezentaciji $\frac{1}{\sqrt{6}}[\psi_1(1)\psi_3(2)\psi_4(3) - \psi_1(2)\psi_3(1)\psi_4(3) + \psi_1(3)\psi_3(1)\psi_4(2) - \psi_1(3)\psi_3(2)\psi_4(1) + \psi_1(2)\psi_3(3)\psi_4(1) - \psi_1(1)\psi_3(3)\psi_4(2)]$.

Rešitev naloge 14: Imamo $\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k,\sigma} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} c_{k\sigma}|\chi_\sigma\rangle$, ter po definiciji potencialne energije $\hat{V} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{r}'\Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi^\dagger(\mathbf{r}')V(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r})$. Vstavimo, in dobimo izraz $\frac{1}{2V}\Delta a^3 \sum_{k,q,p,\sigma} c^\dagger_{k,\bar{\sigma}} c^\dagger_{q,\sigma} c_{p,\bar{\sigma}} c_{q+k-p,\sigma}$. Uporaba Wickovega izreka nam nato da pričakovano vrednost $\langle\phi_0|V|\phi_0\rangle = -\frac{\Delta a^3 N^2}{4V}$.

Rešitev naloge 15: (a) $|10011\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|145\rangle^{\mathrm{I.}} - |415\rangle^{\mathrm{I.}} - |154\rangle^{\mathrm{I.}} + |451\rangle^{\mathrm{I.}} + |514\rangle^{\mathrm{I.}} - |541\rangle^{\mathrm{I.}})$. (b) $[a_i\sigma^i, b_j\sigma^j] = a_i b_j 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma^k = 2\mathrm{i}c_k\sigma^k$ z $c_k = \varepsilon_{ijk}a_i b_j$.

Rešitev naloge 16: Najprej imamo $\rho_q = \sum_{k,\sigma} c^\dagger_{k,\sigma} c_{k+q,\sigma}$. V kontinuumski limiti bomo naredili zamenjavo $\sum_{k,\sigma} \to \frac{2V}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\mathbf{k}$, kjer za delce s spinom 1/2 velja ${k_\mathrm{F}}^3 = \frac{3\pi^2 N}{V}$. Najprej izračunamo primer $q = 0$, za katerega dobimo $S(0) = N$. Za $q \neq 0$ pa imamo $S(q) = \frac{1}{N}(N - \frac{2V}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\,\Theta(k_\mathrm{F} - k)\Theta(k_\mathrm{F} - |k+q|)$. Označimo $q/k_\mathrm{F} = u$ in dobimo, da je za $u > 2$ $S(u) = 1$, sicer pa $S(u) = 1 - \frac{1}{16}(2-u)^2(4+u)$. Do rezultata lahko pridemo tudi z uporabo Wickovega izreka.

Rešitev naloge 17: Z indukcijo lahko pokažemo, da velja $[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$. Taylorjev razvoj potem da $[a_j, f(a_j^\dagger)] = f'(a_j^\dagger)$. Drugi izraz lahko dobimo s hermitsko adjungacijo prvega, $[a_j^\dagger, f(a_j)] = -f'(a_j)$.

Rešitev naloge 18: Funkcijo $g(z)$ razvijemo v vrsto okoli $z = 0$, za odvode pa z neposrednim računom dobimo $g(0) = a$, $g'(z) = -a^\dagger g(z) + g(z)a^\dagger$, in torej $g'(0) = 1$, vsi višji odvodi pa so nič. Torej $g(z) = a + z$. Do rezultata lahko pridemo tudi če uporabimo rezultat naloge 17, in zapišemo $([\mathrm{e}^{-za^\dagger}, a] + a\mathrm{e}^{-za^\dagger})\mathrm{e}^{za^\dagger} = -(-z)\mathrm{e}^{-za^\dagger}\mathrm{e}^{za^\dagger} + a$.

Rešitev naloge 19: Za začetek uporabimo Baker-Hausdorffovo enakost, in pokažemo, da je $\mathrm{e}^{-za^\dagger a} a \mathrm{e}^{za^\dagger a} = a\mathrm{e}^z$. Podobno pokažemo tudi $\mathrm{e}^{-za^\dagger a} a^\dagger \mathrm{e}^{za^\dagger a} = a^\dagger \mathrm{e}^{-z}$. Do rezultata sedaj ni več daleč; f razvijemo v dvojno vrsto in med potence bozonskih operatorjev vrivamo identitete $\mathrm{e}^{za^\dagger a}\mathrm{e}^{-za^\dagger a}$.

Rešitev naloge 20: Enakost pomnožimo z desne z $\mathrm{e}^{za^\dagger a}$, nakar upoštevamo, da velja zveza $\mathrm{e}^{-z\,a^\dagger a}a\,\mathrm{e}^{z\,a^\dagger a} = a\,\mathrm{e}^z$ (Heisenbergova slika anihilacijskega operatorja za harmonski oscilator).

Rešitev naloge 21: $[A,B] = 2\mathrm{i}D$, $[B,D] = 2\mathrm{i}A$, in $[A,D] = -2\mathrm{i}B$.

Rešitev naloge 22: Za harmonski oscilator (ali množico nesklopljenih harmonskih oscilatorjev) je v termičnem stanju neničelna samo pričakovana vrednost $\langle a_s^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k})\rangle_\beta =: n_s(k)$ (in pa $\langle a_s(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k})\rangle$), medtem ko sta $\langle a_s^\dagger(\mathbf{k})a_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')\rangle = 0$ in $\langle a_s(\mathbf{k})a_{s'}(\mathbf{k}')\rangle = 0$. Tako dobimo za W

$$\sum_{s,\mathbf{k}} \frac{\hbar}{4MN\omega_s(\mathbf{k})}|\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k})|^2(1+n_s(\mathbf{k})) = \sum_{s,\mathbf{k}} \frac{\hbar}{4MN\omega_s(\mathbf{k})}|\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k})|^2 \cot\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_s(\mathbf{k})\right). \quad (10)$$

Rešitev naloge 23: $(\mathrm{e}^z - 1)c^\dagger c + 1$.

Rešitev naloge 24: $c + z(1 - 2c^\dagger c) - z^2 c^\dagger$.

Rešitev naloge 25: Najprej dobimo $\langle x(t)x(t')\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[(1+n_\beta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')} + n_\beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}\right]$, od koder sledi rezultat $\frac{\hbar}{m\omega}\cot\frac{\hbar\omega\beta}{2}\cos[\omega(t-t')]$.

Rešitev naloge 26: Razvoj da $a|z\rangle = z|z\rangle$, ter $\langle z|z\rangle = \mathrm{e}^{|z|^2}$, torej $\langle z|a|z\rangle = z\mathrm{e}^{|z|^2}$. Podobno dobimo tudi $\langle z_1|z_2\rangle = \mathrm{e}^{z_1^* z_2}$.

Rešitev naloge 27: Če spremenimo predznak dvema spinskima komponentama, to ohranja komutacijske zveze $[S^\alpha, S^\beta] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}S^\gamma$.

Rešitev naloge 28: Zapišimo transformacijo v matrični obliki $(d_1, d_2) = U(c_1, c_2^\dagger)$. Z eksplicitnim računom lahko preverimo, da so po konstrukciji vsi $\{d_j, d_k\} = 0$, iz pogoja $\{d_j, d_k^\dagger\} = \delta_{j,k}$ pa dobimo $UU^\dagger = \mathbb{1}$.

Rešitev naloge 29: $[d_k, d_k] = 0$, $[d_k, d_k^\dagger] = \mathbb{1} - 2n_k$. Za $j > k$ pa $[d_k, d_j] = 0$ ter $[d_k, d_j^\dagger] = 0$. Primerjava z Jordan-Wignerjevo transformacijo hitro razkrije, čemu je dejansko enak d_j.

Rešitev naloge 30: Lahko uporabimo zvezo BCH, ali pa neposredno izračunamo, $[z]' = a^\dagger$, $[z^2]' = 2a^\dagger z - v\mathbb{1}$, ker smo označili $z := u\,a^\dagger - v\,a$, ter z indukcijo dokažemo splošno zvezo $[z^r]' = ra^\dagger z^{r-1} - r(r-1)\frac{v}{2}z^{r-2}$. Resumacija Taylorjeve vrste nam da zahtevano desno stran enakosti.

Rešitev naloge 31: Oglejmo si delovanje PH in HP na baznih stanjih $|n_1 n_2\rangle$. Vektorja $|00\rangle$ in $|11\rangle$ sta lastna vektorja P z lastno vrednostjo $+1$, vektorja $|01\rangle$ in $|10\rangle$ pa lastna s lastno vrednostjo -1. Tako dobimo $HP|00\rangle = -\Delta|11\rangle$, $HP|11\rangle = -\Delta|00\rangle$, $HP|01\rangle =$

$|10\rangle$, $HP|10\rangle = |01\rangle$, ter enake izraze za PH. Šlo bi seveda tudi tako, da algebrajsko pokažemo $[H,P]=0$.

Rešitev naloge 32: Najprej imamo $|\psi(t)\rangle = \cos{(\varphi)}|0\rangle + \sin{(\varphi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\chi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}|1\rangle$, od koder dobimo $\langle c+c^\dagger\rangle = \sin{(2\varphi)}\cos{(\chi-t)}$.

Rešitev naloge 33: Najprej izračunamo fazno vsoto, $Z = 1/(1-\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})$. Z uporabo zveze BCH imamo $\langle \mathrm{e}^{\alpha a+\gamma a^\dagger}\rangle = \mathrm{e}^{-\alpha\gamma/2}\frac{1}{Z}\sum_n \langle n|\mathrm{e}^{\alpha a}\mathrm{e}^{\gamma a^\dagger}|n\rangle \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon n} = \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-\alpha\gamma/2}\sum_{n,k}\frac{(\alpha\gamma)^k}{k!k!}(n+1)\cdots(n+k)\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon n}$. V vsoti po n prepoznamo binomsko formulo za razvoj $(1-x)^{-(k+1)}$, tako da lahko izraz poenostavimo v $\frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-\alpha\gamma/2}\sum_k \frac{(\alpha\gamma)^k}{k!}(1-\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})^{-(k+1)} = \mathrm{e}^{-\alpha\gamma/2}\exp\left(\frac{\alpha\gamma}{1-\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}}\right) = \exp\left(\frac{\alpha\gamma}{2}\frac{1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}}\right)$.

Rešitev naloge 34: $[A\otimes B, C\otimes D] = \frac{1}{2}([A,C]\otimes\{B,D\}+\{A,C\}\otimes[B,D])$. Za komutator, ki ga potrebujemo v BH zvezi, dobimo $[a\otimes B, a^\dagger\otimes C] = \mathbb{1}\otimes(BC)$, vsi nadaljni gnezdeni komutatorji pa so nič, kar privede do rezultata $a^\dagger\otimes C - z\mathbb{1}\otimes(BC)$.

Rešitev naloge 35: (a) Izračunamo vse potrebne komutatorje in dobimo pogoj $LL^\dagger = \mathbb{1}$. (b) Vzamemo lahko kar ortogonalni nastavek $L_{11} = \cos\varphi, L_{12} = \sin\varphi, L_{21} = -\sin\varphi, L_{22} = \cos\varphi$, od koder dobimo, da z $\varphi = \pi/4$, torej $b_1 = (a_1+a_2)/\sqrt{2}$ in $b_2 = (-a_1+a_2)/\sqrt{2}$, izničimo izvendiagonalne člene.

Rešitev naloge 36: Operator lege v Heisenbergovi sliki je $x(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_0 t} + a^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_0 t})$. Korelacijska funkcija je $\langle x(t)x(0)\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0}(\frac{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_0 t}}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega_0}-1} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_0 t}}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega_0}-1}) = \frac{y}{2k^2}(x+\frac{1}{x})$, kjer smo označili $x := \mathrm{e}^{\beta\hbar\omega_0/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_0 t}$ in $y := \frac{\hbar k^2}{2m\omega_0\sinh{(\beta\hbar\omega_0/2)}}$. Sedaj imamo $S(k,\omega) = \mathrm{e}^{-2W}\int\sum_n I_n(y)\mathrm{e}^{n\beta\hbar\omega_0/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\omega_0 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{e}^{-2W}\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(y)\mathrm{e}^{n\beta\hbar\omega_0/2}\delta(\omega-n\omega_0)$ in končno $S(k,\omega) = 2\pi\mathrm{e}^{-2W}\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(y)\delta(\omega-n\omega_0)$. Ob sipanju na fononski gostoti imamo torej v sipalni amplitudi serijo vrhov pri večkratnikih ω_0 – elastično sipanje je člen z $n=0$, ostali pa predstavljajo neelastično sipanje – momentna odvisnost pa je dana z modificirano Besslovo funkcijo.

Rešitev naloge 37: Heisenbergova slika da $c(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon t}c$, od koder dobimo $C(t,t') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(t-t')}\langle 1+n\rangle + \text{h.c.} = \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}}\cos{\{\varepsilon(t-t')\}}$.

Rešitev naloge 38: $\langle F(t)\rangle = 0$, za kvadratne člene pa imamo $\langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(1+2n)$, $\langle p^2\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}(1+2n)$, $\langle xp\rangle = \mathrm{i}\frac{\hbar}{2}$, in $\langle px\rangle = -\mathrm{i}\frac{\hbar}{2}$, kar nam da $\langle F(t)F(t+\tau)\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\{(1+2n)\cos{(\omega\tau)} + \mathrm{i}\sin{(\omega\tau)}\}$.

Rešitev naloge 39: Ker velja $\mathrm{e}^{-za^\dagger}a\mathrm{e}^{xa^\dagger} = a+z$, nam Taylorjev razvoj da $A = f(a+z)$.

Rešitev naloge 40: (a) $X^2 = 0$ in $(X^\dagger)^2 = 0$, prav tako pa vidimo, da je $X^\dagger X X^\dagger = X^\dagger$ in $XX^\dagger X = X$. (b) Uvedimo oznaki $A = X^\dagger - X$ ter $B = -A^2 = X^\dagger X + XX^\dagger$, in uporabimo (a), kar nas pripelje do $A^3 = -BA = -A, A^4 = B, \ldots$, in končno do $\mathrm{e}^{\lambda A} = A\sin\lambda + \mathbb{1} + B(\cos\lambda - 1)$.

Rešitev naloge 41: (a) Razvoj v vrsto in resumacija da $\mathbb{1}\cosh\lambda + A\sinh\lambda$, (b) Npr. $A = c + c^\dagger$.

Rešitev naloge 42: (a) $Z = \frac{1}{1-\exp(-\beta E_1)}\frac{1}{1-\exp(-\beta E_2)}$, (b) $\partial \ln Z/\partial(-\beta) = E_1/(\exp(\beta E_1)-1) + E_2/(\exp(\beta E_2)-1)$.

Rešitev naloge 43: Komutatorji so enaki kot za spinske operatorje, torej $[J_{\mathrm{x}}, J_{\mathrm{y}}] = \mathrm{i}J_{\mathrm{z}}$, in ustrezne ciklične permutacije.

Rešitev naloge 44: Enako kot pri nalogi 43. Dva fermiona sta torej ekvivalentna dvema spinoma 1/2.

Rešitev naloge 45: $\mathbf{J}^2 = \frac{3}{4}(n_\uparrow + n_\downarrow - 2n_\uparrow n_\downarrow)$, $\mathbf{L}^2 = \frac{3}{4}(1 - n_\uparrow - n_\downarrow + 2n_\uparrow n_\downarrow)$.

Rešitev naloge 46: (a) $|0\rangle$ je lastno stanje z $E_0 = 0$, $|1\rangle$ pa z $E_1 = E$. (b) $\langle n\rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(E-\mu)}+1}$.

Rešitev naloge 47: V bazi $\{|0_1 0_2\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle\}$ dobimo

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ \Delta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Takoj preberemo dve lastni stanji $|10\rangle$ in $|01\rangle$ z energijama $\pm\varepsilon$, na preostalem dvodimenzionalnem podprostoru pa dobimo $(|00\rangle + |11\rangle)$ z energijo Δ, in $(|00\rangle - |11\rangle)$ z energijo $-\Delta$.

Rešitev naloge 48: Lastna energija $E = 0$ je dvakrat degenerirana, lastni stanji sta $|00\rangle$ in $|11\rangle$, na preostalem prostoru pa sta lastni energiji $E = \pm\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}$.

Rešitev naloge 49: Uporabimo simetrije. H komutira z operatorjem skupnega števila fermionov $N = \sum_j c_j^\dagger c_j$, zato ga lahko diagonaliziramo posebej na vsakem podprostoru z dobrim številom delcev. Na enodimenzionalnih podprostorih dobimo $E_0 = 0$ in lastni vektor $|000\rangle$ in podobno na $|111\rangle$ lastno energijo $E_1 = 3\varepsilon$. Na podprostoru z enim delcem pa imamo

$$\begin{aligned} H|001\rangle &= \varepsilon|001\rangle + \Delta(|100\rangle + |010\rangle), \\ H|010\rangle &= \varepsilon|010\rangle + \Delta(|100\rangle + |001\rangle), \\ H|100\rangle &= \varepsilon|100\rangle + \Delta(|010\rangle + |001\rangle). \end{aligned} \tag{14}$$

Brez eksplicitne diagonalizacije hitro vidimo, da je en lastni vektor $(1,1,1)$ s pripadajočo lastno vrednostjo $E_2 = \varepsilon+2\Delta$, en $(1,0,-1)$ z $E_3 = \varepsilon-\Delta$, in zadnji $(1,-2,1)$ z $E_4 = \varepsilon-\Delta$. Na podoben način dobimo na podprostoru z dvema delcema $(1,0,-1)$ z $E_5 = 2\varepsilon + \Delta$, $(1,-1,1)$ z $E_6 = 2\varepsilon - 2\Delta$, in $(1,2,1)$ z $E_7 = 2\varepsilon + \Delta$.

Lastne energije v sektorju z dvema delcema bi lahko dobili iz tistih v sektorju z enim delcem tudi z uporabo simetrije: če naredimo zamenjavo $c \leftrightarrow c^\dagger$ (ki je kanonična, torej ohranja spekter), in bi ji lahko rekli "particle-hole" transformacija, vidimo, da se prvotni Hamiltonijan preslika kot $H(\varepsilon,\Delta) \to 3\varepsilon\mathbb{1} + H(-\varepsilon,-\Delta)$. To pomeni, da dobimo lastno energijo E' v sektorju z dvema delcema iz tiste E v sektorju z enim delcem kot $E' = 3\varepsilon - E$. Ista simetrija seveda velja tudi med sektorjema z nič in tremi delci.

Rešitev naloge 50: V transformaciji bomo potrebovali le en realni parameter, tako da nastavimo

$$d_1 := uc_1 + vc_2^\dagger, \qquad d_2 := -vc_1 + uc_2^\dagger, \tag{16}$$

kjer nam pogoj za kanoničnost $d_{1,2}$ da vez $u^2 + v^2 = 1$. To pomeni, da se splača izbrati parametrizacijo $u = \cos\varphi$ in $v = \sin\varphi$ (taki transformaciji pravimo transformacija Bogoliubova). Prosti parameter φ določimo tako, da bomo imeli v Hamiltonijanu zapisanem s transformiranimi fermioni le diagonalne člene (operatorje zasedenosti). Po nekaj računanja nam to da pogoj $\tan(2\varphi) = \Delta/\varepsilon$, od koder lahko izrazimo potrebne izraze za $\cos(2\varphi) = \varepsilon/\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}$ in $\sin(2\varphi) = \Delta/\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}$. Hamiltonijan se tako zapiše kot

$$H = \sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}(d_1^\dagger d_1 - d_2^\dagger d_2) + \varepsilon =: \text{konst.} + \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j d_j^\dagger d_j. \tag{17}$$

Enodelčni energiji sta $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}$ in $\varepsilon_2 = -\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}$. Štiri lastne vrednosti H sedaj dobimo s preprostim polnjenjem enodelčnih nivojev ϵ_j, kar da $\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}$.

Rešitev naloge 51: Fockova stanja so kar lastna stanja H, tako da takoj dobimo $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon t}|10\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t}|01\rangle)$, in $\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle = \cos(\varepsilon t)$.

Rešitev naloge 52: Celotno bazo 2^4 stanj razdelimo na simetrijske podprostore glede na lastne vrednost $(Z, P_\mathrm{x}, P_\mathrm{y})$ vseh treh simetrij. Tako imamo :

$$\begin{aligned}
(4,1,1) &: \{|0000\rangle\} \\
(-4,1,1) &: \{|1111\rangle\} \\
(3,1,1) &: \{\tfrac{1}{2}(|1011\rangle + |0111\rangle + |1110\rangle + |1101\rangle)\} \\
(3,1,-1) &: \{\tfrac{1}{2}(|1011\rangle + |0111\rangle - |1110\rangle - |1101\rangle)\} \\
(3,-1,1) &: \{\tfrac{1}{2}(|1011\rangle + |0111\rangle - |1110\rangle - |1101\rangle)\} \\
(3,-1,-1) &: \{\tfrac{1}{2}(|1011\rangle - |0111\rangle - |1110\rangle + |1101\rangle)\} \\
Z = 1 &: \text{enako kot } Z = 3\text{, le da zamenjamo 0 in 1} \\
(2,1,1) &: \{\frac{1}{\sqrt{2}}(|1100\rangle + |0011\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle + |0101\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|0110\rangle + |1001\rangle)\} \\
(2,1,-1) &: \{\frac{1}{\sqrt{2}}(|1100\rangle - |0011\rangle)\} \\
(2,-1,1) &: \{\frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle - |0101\rangle)\} \\
(2,-1,-1) &: \{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0110\rangle - |1001\rangle)\}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Pri konstrukciji teh baznih stanj si pomagamo z dejstvom, da za operator parnosti velja $P^2 = \mathbb{1}$, in torej lahko iz poljubnega stanje $|\psi\rangle$ dobimo stanje z dobro parnostjo z $\sim (\mathbb{1} \pm P)|\psi\rangle$. Da dobimo vse lastne energije H je treba diagonalizirati en 3×3 blok, in 10 enodimenzionalnih. Na enodimenzionalnih takoj dobimo lastne energije $0, 0, 4, 0, 0, -4, 4, 0, 0, -4$ (naštete v istem vrstnem redu kot smo našteli podprostore). Na edinem netrivialnem podprostoru pa imamo matriko

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

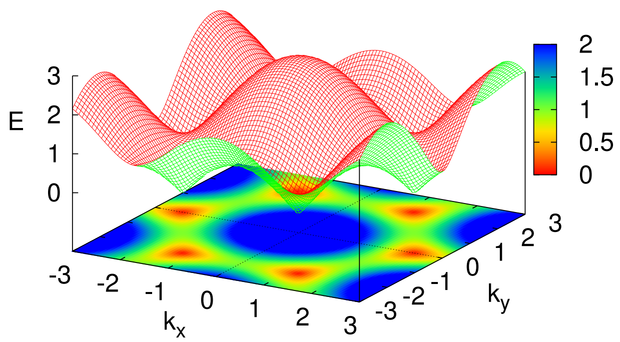
z lastnimi vrednostmi $0, \pm 4\sqrt{2}$.

Rešitev naloge 53: Za izračun $[N, H] = 0$ potrebujemo $[a^\dagger a, a^\dagger c + c^\dagger a] = -c^\dagger a + a^\dagger c$ in $[c^\dagger c, a^\dagger c + c^\dagger a] = -ca^\dagger + ac^\dagger$. Na podprostoru z $N = 0$ imamo trivialno lastno energijo 0. Na preostalem podprostoru pa je potrebno diagonalizirati dvodimenzionalne bloke H, ki jih razpenjajo stanja $\{|n, 0\rangle, |n-1, 1\rangle\}$. Dobimo

$$H_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \hbar\omega n & J\sqrt{n} \\ J\sqrt{n} & \hbar\omega(n-1) + \varepsilon \end{pmatrix}, \tag{21}$$

kar da lastne energije $(\varepsilon + \hbar\omega(2n-1) \pm \sqrt{(\hbar\omega - \varepsilon)^2 + 4J^2 n})/2$.

Rešitev naloge 54: Po Fourierovi transformaciji dobimo $H = -t\sum_k (D\, c^\dagger_{kB} c_{kA} + D^*\, c^\dagger_{kA} c_{kB}) + \varepsilon \sum_k (c^\dagger_{kA} c_{kA} + c^\dagger_{kB} c_{kB})$, kjer je $D := 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}}$. Posamezni $\mathbf{k}$-ji so razklopljeni, tako da dobimo lastne energije 0 in 2ε za stanji brez oz. z dvema elektronoma, in $\varepsilon \pm t|D|$ za stanji z enim elektronom. Če označimo z $c = |\mathbf{a}|/\sqrt{3} = |\mathbf{b}|/\sqrt{3}$ razdaljo med sosednjimi atomi, imamo eksplicitno obliko $|D|^2 = 3 + 2\cos(\sqrt{3}ck_x) + 4\cos(3ck_y/2)\cos(\sqrt{3}ck_x/2)$ (glej sliko). V posebnih točkah Brillouinove cone (npr. $k_x = 4\pi/(3c\sqrt{3})$, $k_y = 0$) je lahko $|D| = 0$, kar privede do znamenite stožčaste oblike energijske ploskve v okolici teh t.i. "Diracovih" točk (Hamiltonove konične singularnosti), $E \approx \varepsilon \pm \frac{t}{2c}k$, če je k radialna oddaljenost od Diracove točke.



Slika 2: Lastne energije elektronov v grafenu, $E = \varepsilon + t|C|$, za $c = t = 1$ in $\varepsilon = 0$.

Rešitev naloge 55: Hamiltonijan ohranja parnost skupnega števila fermioniv, tako da lahko diagonalizacijo razbijemo na dva podprostora. Na lihem podprostoru imamo

$H|01\rangle = -|10\rangle$, in $H|10\rangle = -|01\rangle$, od koder lahko takoj vidimo, da sta $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ lastni stanji z energijama $E = \mp 1$. Podobno dobimo na sodem podprostoru $H|00\rangle = -\Delta|11\rangle, H|11\rangle = -\Delta|00\rangle$, kar da lastni stanji $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ in energiji $E = \mp\Delta$.

Rešitev naloge 56: (a) $\binom{4}{2} = 6$. (b) Bazo uredimo kot $|1_\downarrow 1_\uparrow 2_\downarrow 2_\uparrow\rangle$, in imamo

$$\begin{aligned}
H_t|0011\rangle &= -t|0110\rangle + t|1001\rangle \\
H_t|1100\rangle &= t|1001\rangle - t|0110\rangle \\
H_t|0101\rangle &= \emptyset \\
H_t|1010\rangle &= \emptyset \\
H_t|1001\rangle &= t|1100\rangle + t|0011\rangle \\
H_t|0110\rangle &= -t|1100\rangle - t|0011\rangle,
\end{aligned}$$

medtem ko je H_U diagonalen. Takoj preberemo tri lastne vektorje, ki jim pripada lastna vrednost 0, in sicer $|0101\rangle, |1010\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|1001\rangle + |0110\rangle)$ (prva dva imata neničeln spin v smeri z – del tripleta; tretjemu bi rekli "kovalentna vez" – elektrona deljena med dva atoma). Podobno vidimo, da je $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0011\rangle - |1100\rangle)$ lastni vektor H z lastno vrednostjo U ("ionska" vez, ker sta oba elektrona na enem atomu). Ostane nam torej le še dvodimenzionalni podprostor, ki ga razpenjata $|1001\rangle - |0110\rangle$ ("kovalentno") in $|1100\rangle + |0011\rangle$ ("ionsko"), in na katerem se H zapiše kot

$$\begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 2t & U \end{pmatrix}, \tag{24}$$

kar da lastni vrednosti $\lambda_\pm = \frac{U}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 16t^2/U^2})$ in (nenormirana) lastna vektorja v tej bazi $(2t, \lambda_\pm)$. Vidimo, da je za pozitiven U (Coulombski odboj med elektronoma) najnižje stanje tisto z λ_-, in je mešanica "kovalentne" in "ionske" vezi. Za velike U je $\lambda_- \approx -\frac{4t^2}{U}$, vez pa ima le majhno primes "ionske", ureditev spinov pa je tedaj antiferomagnetna. Vidimo tudi, da je λ_- negativna na račun kinetičnega dela (za $t = 0$ bi bila minimalna energija 0), ki, četudi je majhen, zniža energijo stanja, če je le to delokalizirano. Omenjeni Hamiltonijan imenujemo Hubbardov, in je, ko ga zapišemo na L mestih, pomemben v kondenzirani snovi.

Rešitev naloge 57: $Z = 1 + 2\mathrm{e}^{\beta\mu} + \mathrm{e}^{-\beta U + 2\beta\mu}$, $\langle N\rangle = 2(\mathrm{e}^{\beta\mu} + \mathrm{e}^{-\beta U + 2\beta\mu})/Z$. $\langle N\rangle$ se giblje med 0 in 2; pri nizkih temperaturah ima dolg plato pri enojni zasedenosti ("half-filling"), nato pa okoli $\mu = U$ skok na dvojno zasedenost (ta skok preprosto pomeni, da nas stane $\approx U$, da dodamo drugi elektron).

Rešitev naloge 58: Vzamemo $d^\dagger_{k\sigma} := \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}kj} c^\dagger_{j\sigma}$, kjer je $k = 2\pi l/L$ za PBC, in dobimo $H = \sum_{k\sigma} -2t\cos(k) d^\dagger_{k\sigma} d_{k\sigma}$. Vidimo, da imamo običajni Blochov pas širine $4t$. V limiti $t \gg U$ bodo torej lastne rešitve Hubbarda sestavljene iz (delokaliziranih) ravnih valov, v bližini osnovnega stanja pa bodo, ne glede na število elektronov, na voljo proste orbitale, kar pomeni, da se snov obnaša kot kovina. Na drugi strani pa bo za $U \gg t$ in polovično zasedenost (half-filling, t.j., povprečno en elektron na mesto) na vsakem mestu en elektron, majhen neničelni t pa bo povzročil antiferomagnetno ureditev v osnovnem stanju (kar lahko vidimo iz računa na dveh mestih). To pomeni, da bo najbližje nezasedeno stanje v energiji oddaljeno $\approx U \gg t$, saj nas toliko stane premik elektrona na sosednje (zasedeno) mesto. Posledično se snov v limit $U \gg t$ in nizkih temperaturah obnaša kot izolator. Če spreminjano U od velike proti majhni vrednosti, mora biti nekje vmes t.i. Mottov prehod med izolatorjem in kovino.

Rešitev naloge 59: Po standardni Fourierovi transformaciji imamo $H = -UL\langle n_\uparrow\rangle\langle n_\downarrow\rangle + \sum_k -2t\cos(k)(n_{k\uparrow}+n_{k\downarrow}) + U(n_{k\uparrow}\langle n_\downarrow\rangle + n_{k\downarrow}\langle n_\uparrow\rangle)$. Pri danih zapolnjenostih seštejemo po ustreznih momentih $k = 2\pi l/L$, t.j., do ustreznega fermijevega valovnega števila, in dobimo $E_{\mathrm{grnd}}/L = U\langle n_\uparrow\rangle\langle n_\downarrow\rangle - \frac{2t}{\pi}[\sin(\pi\langle n_\uparrow\rangle)+\sin(\pi\langle n_\downarrow\rangle)]$. (b) Iz minimizacija E_{grnd} vidimo, da bo pri velikih U optimalen $\langle n_\uparrow\rangle = 1$ (ali 0), torej feromagnetna ureditev, pri majhnih U pa bo $\langle n_\uparrow\rangle = 1/2$, torej paramagnet. Ta rezultata sugerirata popolnoma napačno fiziko – približek povprečnega polja v tem primeru ni dober, saj je v resnici ureditev antiferomagnetna (glej npr. nalogo 56).

Rešitev naloge 60: (a) $A_H(b_1) = E_1 b_1$ in $A_H(b_2) = E_2 b_2$. (b) Nastavek $b_1 = ua_1 + va_2$ in pogoj $A_H(b_1) = \lambda b_1$ privede do

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

in enako za b_2. Lastni problem torej da $E_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2+4\Delta^2})$, in $b_{1,2} = A_{1,2}(\{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2+4\Delta^2}\}a_1 + 2\Delta a_2)$, s takšnima $A_{1,2}$, da bo veljalo $u^2+v^2=1$.

Rešitev naloge 61: (a) $|00\rangle$ in $|11\rangle$ sta lastna vektorja z lastno vrednostjo 0, $(|01\rangle+|10\rangle)$ ima lastno -1, $(|01\rangle-|10\rangle)$ pa $+1$. (b) $|00\rangle$ ima lastno 0, $(|01\rangle+|10\rangle)$ ima lastno 1, $(|01\rangle-|10\rangle)$ lastno -1, $(|02\rangle-|20\rangle)$ lastno 0, $(|02\rangle+|20\rangle+\sqrt{2}|11\rangle)$ lastno 2, in $(|02\rangle+|20\rangle-\sqrt{2}|11\rangle)$ lastno -2.

Rešitev naloge 62: Jordan-Wigner za primer periodičnih robnih pogojev spinske verige nam da

$$\begin{aligned} H = -hL + 2hN \quad &+ \sum_{j=1}^{L-1}(c_j c_{j+1}^\dagger - c_j^\dagger c_{j+1} + \gamma c_j c_{j+1} - \gamma c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger) + \\ &+ (-1)^{N+L}(c_L^\dagger c_1 + \gamma c_L^\dagger c_1^\dagger + c_1^\dagger c_L + \gamma c_1 c_L), \end{aligned} \tag{26}$$

kjer je $N := \sum_{j=1}^L n_j$. Če imamo odprte robne pogoje zadnjega člena v zgornji enačbi ni. Ta člen lahko zapišemo v isti obliki, kot člene v vsoti, ki jo tako lahko potegnemo do L, če predpišemo, da je $c_{L+1} := -c_1$ za sode $N+L$, in $c_{L+1} := c_1$ za lihe $N+L$ (N je konstanta gibanja, zato se lahko vedno omejimo na podprostor z dobrim številom fermionov). Naslednji korak je Fourierova transformacija, $c_j =: \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi/4}}{\sqrt{L}}\sum_k d_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{L}kj}$, na momentne fermionske operatorje d_k. Za lihe $N+L$ zasede k cele vrednosti, $k = 0,1,\ldots,L-1$, za sode $N+L$ pa polcele, $k = \frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots,L-\frac{1}{2}$. Od zdaj naprej naj bo $N+L$ sod. Po nekaj računanja dobimo $H + hL = \sum_{k=1}^L \varepsilon_k(d_k^\dagger d_k + d_{L-k}^\dagger d_{L-k}) - \sum_{k=1}^L \Delta_k(d_k d_{L-k} + d_{L-k}^\dagger d_k^\dagger)$, kjer je $\varepsilon_k = h - \cos(\frac{2\pi}{L}k)$ in $\Delta_k = \gamma\sin(\frac{2\pi}{L}k)$. Fermioni so sedaj sklopljeni le še po parih, ki jih lahko razklopimo s transformacijo Bogoliubova (naloga 50). To nam končno da $H = \sum_{k=1}^L \epsilon_k(2f_k^\dagger f_k - 1)$, z enodelčnimi energijami $\epsilon_k = \sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta_k^2}$.

Rešitev naloge 63: Prvi komutator lahko izračunamo tako, da uporabimo komutatorje med bozonskimi, drugega pa najlažje tako, da ga izpišemo, in nato izraz poenostavimo. Komutatorji so sicer enaki, prostor nad katerim delujejo pa je različen!

Rešitev naloge 64: V lastni bazi S_j^z je osnovno stanje $|S, S, \ldots, S\rangle$ (ker je sistem izotropen je osnovno stanje v resnici $(2S+1)$ krat degenerirano). To lahko pokažemo tako, da za dva soseda zapišemo $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 - \frac{1}{2}\mathbf{S}_1^2 - \frac{1}{2}\mathbf{S}_2^2 \leq S^2$. Sedaj uporabimo transformacijo H.-P., in v razvoju obdržimo člene, ki so največ kvadratni v bozonih. To nam da $H = -JS^2 n - JS \sum_j (a_j a_{j+1}^\dagger + a_j^\dagger a_{j+1} - 2a_j^\dagger a_j)$. Nato naredimo Fourirovo transformacijo, $a_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,j} b_k$, in dobimo $H = -JnS^2 + \sum_k \varepsilon_k b_k^\dagger b_k$, kjer je energija enodelčnih vzbuditev (magnonov) dana z $\varepsilon_k = 4JS \sin^2 \frac{k}{2}$. Za majhne valovne vektorje imamo kvadratno disperzijo, ki je posledica zvezne simetrije začetnega modela. Stanja z enim magnonom so sicer točna lastna stanja tudi za prvotni H, superpozicije magnonov pa ne več – pokvarijo jih členi višjih redov, ki smo jih v razvoju zanemarili. Opis z magnonskimi kvazidelci je tako samo približen in smiseln le pri nizkih energijah in majhnih gostotah.

Rešitev naloge 65: $J_k = 2(\sigma_k^x \sigma_{k+1}^y - \sigma_k^y \sigma_{k+1}^x) = 4\mathrm{i}(c_k^\dagger c_{k+1} + c_k c_{k+1}^\dagger)$.

Rešitev naloge 66: Ob upoštevanju $(\mathrm{e}^z - 1)c^\dagger c + 1$ hitro dobimo $d_k(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_k t} d_k$, kar da $g(t) = \langle 0|\sum_{q,k} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}qm} d_q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kl} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_k t} d_k^\dagger |0\rangle \to \mathrm{i}^{|l-m|} J_{|l-m|}(4t)$.

Rešitev naloge 67: Po (ii) dobimo $H \approx -S^2 n + S \sum_j (2a_j^\dagger a_j + a_j a_{j+1} + a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger)$. Fourier $a_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kj} b_k$ nam da $H = -S^2 n + S \sum_k (2b_k^\dagger b_k + \cos(k)\{b_k b_{-k} + b_k^\dagger b_{-k}^\dagger\})$. Vidimo, da sta sedaj sklopljena samo še po dva bozona, b_k in b_{-k}, tako da uporabimo transformacijo Bogoliubova na dveh bozonih,

$$b_k := \cosh \Theta_k \, \beta_k - \sinh \Theta_k \, \beta_{-k}^\dagger, \quad b_{-k}^\dagger := -\sinh \Theta_k \, \beta_k + \cosh \Theta_k \, \beta_{-k}^\dagger, \tag{28}$$

ki smo jo parametrizirali tako, da je kanonična. Nediagonalni člen $\beta_k \beta_{-k}$ ima predfaktor $-\sinh(2\Theta_k) + \cos k \cosh(2\Theta_k)$, kar pomeni, da moramo izbrati $\tanh(2\Theta_k) = \cos k$. Na drugi strani je faktor pred obema diagonalnima členoma enak $\cosh(2\Theta_k) - \cos k \sinh(2\Theta_k)$, tako da lahko H dokončno poenostavimo v

$$H = -nS(S+1) + 2S \sum_k |\sin k| (\beta_k^\dagger \beta_k + \frac{1}{2}). \tag{29}$$

Rešitev naloge 68: $\frac{H}{2} = (2n_2 - 1)(2n_3 - 1)(c_1 c_4^\dagger + c_4 c_1^\dagger) + (2n_3 - 1)(c_2 c_4^\dagger + c_4 c_2^\dagger) + (c_3 c_4^\dagger + c_4 c_3^\dagger)$.

Rešitev naloge 69: Če uporabimo Jordan-Wignerja v isti cik-cak smeri, kot so oštevilčena mesta v H, imamo med sosedi (diagonalne prečke na sliki) $h_{j,j+1} = 2(c_j c_{j+1}^\dagger - c_j^\dagger c_{j+1})$, med naslednjimi sosedi (horizontalne prečke na sliki) pa $h_{j,j+2} = 2(2n_{j+1} - 1)(c_j c_{j+2}^\dagger - c_j^\dagger c_{j+2})$.

Rešitev naloge 70: (a) Spektralni razcep nam da $H = \sum_\lambda \lambda|\lambda\rangle\langle\lambda|$, od koder takoj vidimo, da za poljuben $|\psi\rangle$ velja $\langle\psi|H|\psi\rangle \geq \min(\lambda) = E_0$, z enakostjo v primeru $|\psi\rangle = |E_0\rangle$ (oz. za poljubno linearno kombinacijo degeneriranih osnovih stanj). Torej je $E_0 = \min_\psi\langle\psi|H|\psi\rangle$, kar pa ni nič drugega kot diagonalni matrični element v bazi, kjer je eden izmed baznih elementov enak ψ. (b.i) Velja $\langle\psi|H|\psi\rangle = -N$, ni pa lastno stanje, saj ni lastno stanje "skakalnega" dela Hamiltonijana. (b.ii) Sklopitev med sosednjima spinoma s spinskimi operatorji zapišemo kot $4\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$, produkt spinskih operatorjev pa $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}([\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2]^2 - \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2)$. Dva spina 1/2 lahko sklopimo v skupno vrtilno količino 0 ali 1, kar pomeni, da je $\min\langle\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2\rangle = -3/4$, in torej zagotovo $E_0 \geq -3N$. Bethe je za točno energijo osnovnega stanja v termodinamski limiti dobil $E_0 = -(4\ln 2 - 1)N \approx -1.77N$, ker seveda leži med mejama, ki smo ju dokazali.

Rešitev naloge 71: Če imamo sklopitev med sosednjimi indeksi (sosednjimi v smislu oštevilčenja v Jordan-Wignerjevi transformaciji), imamo $\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x = (c_j - c_j^\dagger)(c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger)$ in $\sigma_j^y\sigma_{j+1}^y = (c_j^\dagger + c_j)(c_{j+1}^\dagger - c_{j+1})$. Dodatni fazni faktor imamo za levi primer med prvim in zadnjim mestom, kjer imamo $\sigma_1^y\sigma_6^y = [\prod_{j=2}^6 \sigma_j^z](c_1^\dagger + c_1)(c_6^\dagger + c_6) = [\prod_{j=1}^6(2n_j - 1)](c_1^\dagger - c_1)(c_6^\dagger + c_6)$.

Rešitev naloge 72: (a) Iz Jordan-Wignerja prepoznamo, da je $c_j = \tilde{c}_j + \tilde{c}_j^\dagger$ in $d_j = \mathrm{i}(\tilde{c}_j - \tilde{c}_j^\dagger)$, kjer so $\tilde{c}_j$ standardni Fermionski operatorji. Od tod dobimo $\{c_j, c_k\} = 2\delta_{jk}$, $\{d_j, d_k\} = 2\delta_{jk}$, in $\{c_j, d_k\} = 0$. c_j na različnih mestih antikomutirajo – predstavljajo fermionske delce – hkrati pa velja $c_j^\dagger = c_j$, torej so sami sebi antidelci, in $c_j^2/2 = \mathbb{1}$. Takim delcem pravimo Majoranovi fermioni. (b) $H = \mathrm{i}\sum_j(c_jd_{j+1} - d_jc_{j+1})$.

Rešitev naloge 73: (a) Dovolj je pokazati, da je $\sigma_1^x\mathbb{1}_2\sigma_3^x(\sigma_1^z\sigma_2^x\sigma_3^z)\sigma_1^x\mathbb{1}_2\sigma_3^x = \sigma_1^z\sigma_2^x\sigma_3^z$, ter tudi $\mathbb{1}_1\sigma_2^x\mathbb{1}_3(\sigma_1^z\sigma_2^x\sigma_3^z)\mathbb{1}_1\sigma_2^x\mathbb{1}_3 = \sigma_1^z\sigma_2^x\sigma_3^z$. Fizikalno pa lahko vidimo da $U_{1,2}$ obrneta vsaki drugi spin (spremenita predznak σ^z in σ^y), kar ne prizadene S_j, ki vsebije sodo σ^z. (b) Izračunati je treba tri primere, ko se S_j in S_k "prekrivata" na $0, 1$ ali 2 mestih. V vseh primerih pa je rezultat $[S_j, S_k] = 0$. (c) Ker S_j med seboj komutirajo, in torej tudi s H, jih lahko hkrati diagonaliziramo. Torej je tudi osnovno stanje hkrati lastno stanje vseh S_j. Potrebno je torej pokazati, da je $|g\rangle$ lastno stanje S_j. Dan S_j bo imel prekrivanje s štirimi zaporednimi $C_{j,j+1}$, zato si ogledamo $\sigma_1^z\sigma_2^x\sigma_3^z(C_{0,1}C_{1,2}C_{2,3}C_{3,4}) = (C_{0,1}C_{1,2}C_{2,3}C_{3,4})\sigma_1^x$, kjer smo uporabili $\sigma^\mathrm{z}|0\rangle\langle 0| = |0\rangle\langle 0|$, $\sigma^\mathrm{z}|1\rangle\langle 1| = -|1\rangle\langle 1|$, in $\sigma_1^xC_{1,2} = C_{1,2}\sigma_1^x$. Ker je $|+\rangle$ lastno stanje σ^x, imamo $S_j|g\rangle = |g\rangle$. Sedaj moramo pokazati le, da je 1 največja lastna vrednost S_j, kar je posledica tega, da je S_j produkt Paulijevih, od katerih ima vsaka lastne vrednosti ± 1, in je torej lahko lastna vrednost S_j kvečjemu 1.

Rešitev naloge 74: (a) $[S^\mathrm{z}, S^\pm] = \pm S^\pm$, $[S^+, S^-] = 2S^\mathrm{z}$ $((S^-)^\dagger \neq S^+)$. (b) $C_1 = S(S+1)\mathbb{1}$, $C_2 = (n + S^2)\mathbb{1}$. (c) $H \approx -JS\sum_j(a_j^\dagger a_{j+1} + a_ja_{j+1}^\dagger) + 2JS\sum_j a_j^\dagger a_j - JS^2n$.

Rešitev naloge 75: (a) $h_{j,j+1} = -2(c_jc_{j+1}^\dagger - c_j^\dagger c_{j+1}) - 2\gamma(c_jc_{j+1} - c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger) = \Delta(2n_j - 1)(2n_{j+1} - 1) + b(n_j + n_{j+1} - 1)$. (b) Npr. parnost. (c) Osnovno stanje je stanje z minimalno energijo. Za produktno stanje, je le-ta dana kar z $\langle\alpha\alpha|h_{1,2}|\alpha\alpha\rangle$, torej 2-spinsko produktno stanje $|\alpha\alpha\rangle$ minimizira energijo h. Stanje, ki minimizira energijo h je tisto lastno stanje h, ki ima najmanjšo lastno vrednost, in torej mora biti produktno $|\alpha\alpha\rangle$ lastno stanje h. Vprašanje torej je, kdaj bo imel h produktno lastno stanje, ki bo hkrati tudi osnovno. h lahko diagonaliziramo posebej na sodem in lihem podprostoru, kar nam da na sodem podprostoru iz $\{|00\rangle, |11\rangle\}$ najmanjšo lastno vrednost $\lambda_{\min} = -\Delta - \sqrt{b^2 + 4\gamma^2}$ in lastni vektor $(b + \sqrt{b^2 + 4\gamma^2}, -2\gamma)$, ki pa ni nikoli produkten. Na lihem podprostoru iz $\{|01\rangle, |10\rangle\}$ imamo $\lambda_{\min} = -2 + \Delta$ in pripadajoči lastni vektor $(-1, 1)$, ki tudi ni nikoli produkten. Lahko pa se zgodi, sta obe najmanjši lastni vrednosti enaki, in v tem primeru je lastni vektor lahko superpozicija obeh, in je tako lahko produktno stanje. Če enačimo najmanjši lastni vrednosti iz obeh podprostorov za naše konkretne vrednosti parametrov dobimo pogoj $\Delta = -1/2$, lastna vektorja $(1, -\sqrt{2}/2)$ in $(1, -1)$, s katerih kombinacijo $(|01\rangle - |10\rangle) + \mu(|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle)$ pri $\mu^2 = \sqrt{2}$ dobimo željeno produktno osnovno stanje $|\alpha\rangle|\alpha\rangle$.

Rešitev naloge 76: $H = \frac{t}{2}\sum_j \sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y + \frac{V}{4}\sum_j(\sigma_j^z + 1)(\sigma_{j+1}^z + 1)$.

Rešitev naloge 77: (b) $H = -V\bar{n}^2 L + \sum_k \varepsilon_k n_k$, kjer je $\varepsilon_k = -2t\cos(k) + 2V\bar{n}$, in $k = 2\pi p/L$ za PBC. (c) $E/L = -\frac{2t}{\pi}\sin(\pi\bar{n}) + V\bar{n}^2$. Za velik V bo minimalna energija pri $\bar{n} = 0$, za majhen V pa pri $\bar{n} = 1/2$.

Rešitev naloge 78: Fermionske operatorje razpišemo po ustreznih "particle-hole" operatorjih, za katere velja Wickov izrek, in dobimo $\langle\phi_0|c^\dagger_{k\sigma}c_{p\sigma'}|\phi_0\rangle = \langle\phi_0|\underbrace{c^\dagger_{k\sigma}c_{p\sigma'}}|\phi_0\rangle = \delta_{k\sigma,p\sigma'}\Theta(k_\mathrm{F} - k)$, in $\langle\phi_0|c_{k\sigma}c^\dagger_{p\sigma'}|\phi_0\rangle = \langle\phi_0|\underbrace{c_{k\sigma}c^\dagger_{p\sigma'}}|\phi_0\rangle = \delta_{k\sigma,p\sigma'}\Theta(k - k_\mathrm{F})$. To sta dve osnovni kontrakciji za fermionske operatorje in Fermijevo morje.

Rešitev naloge 79: $-\delta_{k,q'}\delta_{k',q}\Theta(k_\mathrm{F} - k)\Theta(k_\mathrm{F} - q) + \delta_{k,k'}\delta_{q,q'}\Theta(k_\mathrm{F} - k)\Theta(k_\mathrm{F} - q)$.

Rešitev naloge 80: (a) $\delta_{q,0}\Theta(k_\mathrm{F}-k)\Theta(k_\mathrm{F}-k') + \delta_{k,k'-q}\delta_{\sigma,\sigma'}\Theta(k_\mathrm{F}-k)[1-\Theta(k_\mathrm{F}-|k+q|)]$, (b) $-\delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{k+q,k'}\Theta(k_\mathrm{F} - k')\Theta(k_\mathrm{F} - k) + \delta_{q,0}\Theta(k_\mathrm{F} - k)\Theta(k_\mathrm{F} - k')$, (c) N^2.

Rešitev naloge 81: Zaradi spinskih indeksov imamo le dve neničelni popolni kontrakciji, kar nam da $\Theta(k_\mathrm{F} - k'')\Theta(k_\mathrm{F} - k)\Theta(k_\mathrm{F} - k')(\delta_{k+q,k'} - \delta_{q,0})$.

Rešitev naloge 82: Fourierova transformacija je $V_q = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, U(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = U\frac{4\pi}{q^3}(\sin(qR) - qR\cos(qR))$. To nam da $\hat{V} = \frac{2\pi U}{V}\sum_{q,k,k'}\frac{1}{q^3}[\sin(qR) - qR\cos(qR)]c^\dagger_{k+q}c^\dagger_{k'-q}c_{k'}c_k$, in $\langle\phi_0|\hat{V}|\phi_0\rangle = \frac{2\pi U}{V}\sum_{q,k,k'}\frac{1}{q^3}[\sin(qR) - qR\cos(qR)]\Theta(k_\mathrm{F} - k)\Theta(k_\mathrm{F} - k')(\delta_{q,0} - \delta_{k+q,k'})$.

Rešitev naloge 83: Eksplicitni račun da $\{\alpha_{k\sigma}, \alpha_{q\bar{\sigma}}\} = 0$, prav tako $\{\alpha_{k\sigma}, \alpha_{q\sigma}\} = 0$. Antikumutatorje med $\alpha^\dagger$-ji dobimo z adjungacijo teh zvez, križni pa dajo $\{\alpha_{k\sigma}, \alpha_{q\sigma}\} = \delta_{k,q}$ in $\{\alpha_{k\sigma}, \alpha_{q\bar{\sigma}}\} = 0$. Označimo $A_k := u_k + v_k c^\dagger_{-k\downarrow}c^\dagger_{k\uparrow}$. Če je $|k| \neq |q|$ velja $\alpha_{k\sigma}A_q = A_q\alpha_{k\sigma}$, sicer pa $\alpha_{k\uparrow}A_k = A_k c_{k\uparrow}$, $\alpha_{k\downarrow}A_k = A_k\alpha_{k\downarrow}$ in $\alpha_{k\downarrow}A_{-k} = A_{-k}c_{k\downarrow}$, $\alpha_{k\uparrow}A_{-k} = A_{-k}\alpha_{k\uparrow}$. Ko delujemo z $\alpha_{k\uparrow}$ na $|\mathrm{BCS}\rangle$ le-ta komutira z vsemi A_q razen z A_k, ko dobimo dodaten $c_{k\uparrow}$. Ta potem komutira z vsemi ostalimi A_q, tako da ga lahko pripeljemo na desno do $|\varnothing\rangle$, ki nam ga anihilira. Zgodba je analogna tudi za $\alpha_{k\downarrow}$.

Rešitev naloge 84: Imamo $n_{k\uparrow} = (u_k\alpha^\dagger_{k\uparrow} - v_k\alpha_{-k\downarrow})(u_k\alpha_{k\uparrow} - v_k\alpha^\dagger_{-k\downarrow})$, ter $n_{q\downarrow} = (u_q\alpha^\dagger_{q\downarrow} + v_q\alpha_{-q\uparrow})(u_q\alpha_{q\downarrow} + v_q\alpha^\dagger_{-q\uparrow})$. Uporabimo Wickov izrek za α, kjer preživijo le sparitve tipa

$\alpha_{k\sigma}\alpha^{\dagger}_{q\sigma'} = \delta_{k,q}\delta_{\sigma,\sigma'}$, kar nas pripelje do $\langle n_{k\uparrow} n_{q\downarrow}\rangle = v_k^2 v_q^2 + u_k^2 v_k^2 \delta_{k,-q}$.

Rešitev naloge 85: Postopek je podoben tistemu pri nalogi 84. Najprej $c_{k\sigma}$ izrazimo z $\alpha_{k\sigma}$, $c_{k\sigma} = u_k \alpha_{k\sigma} - (-1)^{\sigma} v_k \alpha^{\dagger}_{-k\bar{\sigma}}$, nakar nam Wickov izrek da $\langle n_q n_{-q}\rangle = 2\sum_k v_k u_{k+q}(v_{k+q}u_k + v_k u_{k+q}) + 4\delta_{q,0}(\sum_k v_k^2)^2$.

Rešitev naloge 86: $|g\rangle = |01\rangle_{\mathrm{f}}$. Za $\alpha_j \in \{f_1, f_2^{\dagger}\}$ velja $\alpha_j|g\rangle = \emptyset$. Neničelni sta kontrakciji $f_1 f_1^{\dagger} = f_2^{\dagger} f_2 = 1$. Vstavimo izraze za $c_{1,2}$, in dobimo $\langle g|(-vf_2^{\dagger})(-vf_2)(vf_1)(vf_1^{\dagger})|g\rangle + \langle g|(-vf_2^{\dagger})(uf_1)(uf_2)(vf_1^{\dagger})|g\rangle = v^2$.

Rešitev naloge 87: Izrazimo lahko $f_1 = uc_1 + vc_2^{\dagger}$ in $f_2 = -vc_1 + uc_2^{\dagger}$. Osnovno stanje anihilirata f_1 in $f_2^{\dagger}$. Če torej najdemo katerokoli stanje $|g\rangle_{\mathrm{c}}$, za katero bo veljalo $f_1|g\rangle_{\mathrm{c}} = \emptyset$, $f_2^{\dagger}|g\rangle_{\mathrm{c}} = \emptyset$, bomo vedeli, da je to stanje osnovno stanje. Sedaj se spomnimo, da je kvadrat fermionskih operatorjev nič, kar pomeni, da lahko osnovno stanje skonstruiramo z $|g\rangle_{\mathrm{c}} \propto f_1 f_2^{\dagger}|\psi\rangle$ (za nekatera stanja $|\psi\rangle$ (osnovno stanje) se lahko zgodi, da se desna stran izvrednoti v nič). Poskusimo z $|g\rangle_{\mathrm{c}} \sim (uc_1 + vc_2^{\dagger})(-vc_1^{\dagger} + uc_2)|00\rangle_{\mathrm{c}}$, kar nam da $|g\rangle_{\mathrm{c}} = -u|00\rangle_{\mathrm{c}} + v|11\rangle_{\mathrm{c}}$. Pričakovana vrednost je sedaj enostavna, $\langle g|n_1 n_2|g\rangle = u^2\cdot 0 + v^2 \cdot 1 = v^2$.

Rešitev naloge 88: Stanje $|\psi\rangle$ je vakuum za naslednje $\alpha_j \in \{c_1^{\dagger}, c_2^{\dagger}, c_3, c_4, \ldots, c_N\}$, z osnovnimi sparitvami $\alpha_k\alpha_j^{\dagger} = \delta_{k,j}$. V našem izrazu imamo neničelne prispevke le med $c^{\dagger}_{1,2}c_{1,2} = 1$ in $c_{3,4,\ldots}c^{\dagger}_{3,4,\ldots} = 1$, kar pripelje do rezultata $2N$.

Rešitev naloge 89: (a) Operator toka je $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2mV}\sum_{k,q} c_k^{\dagger}c_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}(\mathbf{q}+\mathbf{k})$. To nam da $\langle \mathbf{j}\rangle = \frac{\hbar}{2mV}\sum_{|k|\le k_{\mathrm{F}}} 2\mathbf{k} = 0$. (b) $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\hbar}{2m}\sum_k (2\mathbf{k}+\mathbf{q})c_k^{\dagger}c_{k+q}$. (c) $\langle \mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}')\rangle = \left(\frac{\hbar}{2mV}\right)^2 \sum_{|k|\le k_{\mathrm{F}}, |q|\ge k_{\mathrm{F}}}(\mathbf{k}+\mathbf{q})^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$.

Rešitev naloge 90: (a) $a_j \in \{c_1, c_2^{\dagger}, c_3, \ldots, c_N^{\dagger}, c_{N+1}, c_{N+2}, \ldots, c_{2N}\}$. (b) $p_0 = 0$, $p_1 = -N/2$, $p_2 = -1$.

Rešitev naloge 91: $C_0 = 3N/2$, $C_1 = N/2$, $C_2 = 1$, $C_3 = N/2$.

Rešitev naloge 92: Klasično bi zapisali jakost električnega polja z izrazom $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_k \varepsilon_k E_k \alpha_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + \mathrm{h.c.}$, kjer bi bila α_k brezdimenzijska amplituda prispevka danega valovnega vektorja. V obeh sistemih bi bilo skupno polje vsota obeh izsevanih fotonov. Za "V" shemo torej $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ac} + \mathbf{E}_{bc}$, pri čemer bi prispevka nihala s frekvencama ω_{ac} in ω_{bc}. Intenziteta je $I \propto |\mathbf{E}|^2 = I_{ac} + I_{bc} +$ (osciliranje z razliko frekvenc). Podobno dobimo oscilirajne tudi za sistem Λ. Kvantno zapišemo operator polja za $\hat{\mathbf{E}}$ z bozonskimi operatorji za vsak Fourierov nihajni način, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r},t) + \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r},t)$, kjer je $\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r},t) = \sum_k \varepsilon_k E_k a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ in $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r},t) = \sum_k \varepsilon_k E_k a_k^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$. Intenziteta je sorazmerna z gostoto fotonov v danem stanju $|\psi(t)\rangle$, in je torej sorazmerna z $\langle \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r},t)\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r},t)\rangle$. V "V" konfuguraciji je stanje atoma in fotonov enako $|\psi(t)\rangle = c_a(t)|a,0\rangle + c_1(t)|c,1_{\omega_{ac}}\rangle + c_2(t)|c,1_{\omega_{bc}}\rangle + c_b(t)|b,0\rangle + c_c(t)|c,0\rangle$. Ko izvrednotimo I vidimo, da imamo oscilirajoči člen $\langle c, 1_{\omega_{bc}}|a^{\dagger}_{\omega_{bc}} a_{\omega_{ac}}|c, 1_{\omega_{ac}}\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega_{bc}-\omega_{ac})t}$ ki, podobno kot klasično, predstavlja interferenco med dvema možnima fotonoma. Za konfiguracijo Λ so zadeve formalno podobne, $|\psi(t)\rangle = c_a(t)|a,0\rangle + c_b(t)|b,0\rangle + c_c(t)|c,0\rangle + c_1(t)|b,1_{\omega_{ac}}\rangle + c_2(t)|c,1_{\omega_{bc}}\rangle$. V tem primeru pa je oscilirajoči člen oblike $\langle b,1_{\omega_{ac}}|a^\dagger_{\omega_{ac}} a_{\omega_{bc}}|c,1_{\omega_{bc}}\rangle$, ki pa je nič. V konfiguraciji Λ tako ne dobimo interference! Lahko se vprašamo, zakaj je Λ drugačen od V? Kratek razlog je, da v primeru Λ lahko iz končnega stanja atoma, brez da bi vplivali na izsevani foton, ugotovimo, kateri foton se je izseval. Poledica tega je, podobno kot npr. pri interferenci na dvojni reži, da se seštevajo verjetnosti, ne amplitude.

Rešitev naloge 93: Propagator razvijemo v vrsto in upoštevamo, kdaj da delovanje $\sigma^\pm$ na $|1\rangle$ neničelno vrednost. Tako imamo

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n,r}\left[\frac{(-\mathrm{i}t)^{2r}}{(2r)!}(\sigma^+a+\sigma^-a^\dagger)^{2r}+\frac{(-\mathrm{i}t)^{2r+1}}{(2r+1)!}(\sigma^+a+\sigma^-a^\dagger)^{2r+1}\right]c_n|1,n\rangle = \\ &= \sum_{n,r}c_n\frac{(-\mathrm{i}t)^{2r}}{(2r)!}(aa^\dagger)^r|1,n\rangle+\sum_{n,r}c_n\frac{(-\mathrm{i}t)^{2r+1}}{(2r+1)!}a^\dagger(aa^\dagger)^r|-1,n\rangle. \end{aligned} \tag{31}$$

Izvedemo še delovanje na bozonski prostostni stopnji in poenostavimo, kar nam da končni rezultat $\sum_n c_n[\cos{(t\sqrt{n+1})}|1,n\rangle - \mathrm{i}\sin{(t\sqrt{n+1})}|-1,n+1\rangle]$.

Rešitev naloge 94: (a) Upoštevamo, da je $c^2=0$. (b) $[Q,QQ^\dagger+Q^\dagger Q]=QQ^\dagger Q-QQ^\dagger Q=0$, hermitska adjungacija te zveze da $[Q^\dagger,H]=0$, spet direktni račun pa $[QQ^\dagger,H]=0$. (c) Naj bo $H|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle$. $\langle\lambda|H|\lambda\rangle=|Q|\lambda\rangle|^2+|Q^\dagger|\lambda\rangle|^2\geq 0$. (d) Če velja $H_1|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle$, potem vidimo, da bo $H_2(Q^\dagger|\lambda\rangle)=Q^\dagger QQ^\dagger|\lambda\rangle=\lambda(Q^\dagger|\lambda\rangle)$. Torej, če je $|\lambda\rangle$ lastno stanje H_1, je tudi $Q^\dagger|\lambda\rangle$ lastno stanje H_2 z enako lastno vrednostjo. S tem mapiranjem torej lahko dobimo vse lastne vektorje H_2, ki pripadajo neničelnim lastnim vrednostim λ. Pri ničelni lastni vrednosti H_1 je potrebna previdnost, saj nam nič na desni strani zveze ne pove, ali smo dobili lastni vektor H_2 z $\lambda=0$, ali pa je morda $Q^\dagger|\lambda\rangle=\emptyset$. Kot primer lahko služi $A=a$, ki da $H_1=(1+a^\dagger a)\otimes n$ in $H_2=a^\dagger a\otimes(1-n)$.

Rešitev naloge 95: H.-P. da $H\approx -\omega(S-n_1)+\omega n_2+\lambda(a+a^\dagger)(b+b^\dagger)$. To prepišemo kot $H=-\omega S+\frac{1}{2}\{\omega^2(x^2+y^2)+p_x^2+p_y^2+2\omega\lambda xy\}$. S ustrezno rotacijo koordinatnega sistema se lahko znebimo sklopitvenega člena, $x=\tilde{x}\sin\varphi+\tilde{y}\cos\varphi$, če izberemo $\cos{(2\varphi)}=0$, kar privede do $H=-\omega S+\frac{1}{2}\{\tilde{p}_x^2+\tilde{p}_y^2+\varepsilon_x^2\tilde{x}^2+\varepsilon_y^2\tilde{y}^2\}$, z $\varepsilon_{x,y}^2=\omega^2\pm 2\omega\lambda$. Lastne energije so torej $E=-\omega S+\sqrt{\omega^2+2\omega\lambda}\tilde{n}_1+\sqrt{\omega^2-2\omega\lambda}\tilde{n}_2$.

Rešitev naloge 96: Splošen H za en kubit je kombinacija treh Paulijevih in identitete. Identitete ne bo, prav tako ne σ^{y}, saj vidimo, da za naš začetni H le ta z dvojnim komutatorjem generira odvod, ki je kombinacija samo σ^{x} in σ^{z}. Torej se oblika H ohranja, račun pa da $\dot{a}_1=-4a_1a_3^2$ in $\dot{a}_3=4a_1^2a_3$. Vidimo, da je $a_1^2+a_3^2=\text{konst.}$, zato se splača parametrizirati $a_1=r\cos\varphi, a_3=r\sin\varphi$, kar nam da enačbo $\dot{\varphi}=2r^2\sin{(2\varphi)}$. Stacionarna točka je $\varphi=0$, ali pa $\varphi=\pi/2$. Prva je nestabilna, zato za naš z.p. ni prava. Dobimo torej $H(\tau\to\infty)=\sqrt{a_1^2+a_3^2}\,\sigma^{\mathrm{z}}$.

Rešitev naloge 97: (a) C je hermitska. (b) Antihermitski B je enak $B_{jk}=C_{jk}(D_{jj}-D_{kk})$, oz. $B=[D,A]$, kjer je $A:=C-D$ izvendiagonalni del C. (c) Za diagonalne elemente velja $\mathrm{d}D_{jj}/\mathrm{d}\tau=([B,A])_{jj}$, za izvendiagonalne pa $\mathrm{d}A_{jk}/\mathrm{d}\tau=([B,D]+[B,A])_{jk}$. Vse enačbe skupaj lahko kompaktno zapišemo tudi z $\mathrm{d}C_{jk}/\mathrm{d}\tau=[[D,C],C]$ (rešitev tega sistema ob odsotnosti degeneracij pripelje do diagonalnega $H(\tau\to\infty)$.

Rešitev naloge 98: Knjigovodstvo definirajmo z $|1_\downarrow 1_\uparrow 2_\downarrow 2_\uparrow\rangle$, bazo pa uredimo v naslednjem vrstnem redu, $\{|0011\rangle, |0110\rangle, |1100\rangle, |1001\rangle\}$. Na začetku imamo

$$H(0) = \begin{pmatrix} U+2h & t & 0 & -t \\ t & 0 & t & 0 \\ 0 & t & U-2h & -t \\ -t & 0 & -t & 0 \end{pmatrix}.$$

Izkaže se, da za $U=0$ tudi $H(\tau)$ ohranja zgornjo obliko, tako da imamo le dva neznana parametra,

$$H(\tau) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & -b \\ b & 0 & b & 0 \\ 0 & b & -a & -b \\ -b & 0 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Evolucijski enačbi sta tako $\dot{a} = 4ab^2$ in $\dot{b} = -a^2 b$, z z.p. $a(0) = 2h, b(0) = 1$. Rešitev je $b(\tau) = \sqrt{\frac{1+h^2}{1+y^2}}$, $a(\tau) = 2yb(\tau)$, kjer je $y := he^{4(1+h^2)\tau}$. V limit $\tau \to \infty$ imamo tako $b \to 0$ in $a \to 2\sqrt{1+h^2}$, torej je v odsotnosti interakcije $H(\tau \to \infty)$ vedno diagonalen ne glede na velikost h.